初中终结性练习

数学

教师教学用书

CHUZHONG ZHONGJIEXING LIANXI

SHUXUE

2024年

初中终结性练习

以课程标准为指导 按层次拓展复习

《初中终结性练习》编写组 编写

数学

教师教学用书

CHUZHONG ZHONGJIEXING LIANXI
SHUXUE

2024年

初中终结性练习

以课程标准为指导 按层次拓展复习

《初中终结性练习》编写组 编写

主　　编 赵晓绒
副 主 编 韩小蕴 刘　娟 路彦祥 王　丹
编写人员 范改芳 胡清元 侯　刚
霍琴琴 李云虎 李爱萍
李爱霞 李仲韬 李　波
牛红平 史晓锋 王亚凤
王　勇 王春锋 周冬霞
赵　爽 邓军尚

数学

教师教学用书

主编谈中考

2023 年陕西省中考数学试题内容形式稳中求进、稳中有新，紧扣课标要求，引导学生打牢基础，突出“四基”，强调应用，指向能力，融入地域文化，彰显育人价值。从题型来看，选择题、填空题所占分值为 39 分，解答题所占分值为 81 分；从内容来看，选择题、填空题注重考查基础知识、基本技能；解答题注重考查数学能力（几何直观、推理能力、运算能力、数据观念、抽象能力、应用意识等），同时在题目中渗透了分类讨论、数学建模、转化化归等数学思想方法。题目难度有梯度，体现了中考数学的选拔功能。整卷起点低，落点高，跨度大，考查全面。

具体来看，2023 年陕西省中考数学试题具有以下特点：

1. 稳中求进，指向“四基”。

选择题、填空题继续以考查实数的运算、整式的运算、多边形的性质、三角形综合、平行四边形及特殊平行四边形的性质、圆的性质、一次函数的图像和性质、反比例函数的图像和性质、二次函数的图像和性质等为重点，解答题以考查主干的基调基本不变。

2. 稳中有新，凸显能力。

与 2022 年试题相比，2023 年试题的结构没有改变，从整体上来说，稳中有变，难度略有提高。选择题中考查数与代数内容的有 4 道试题，分别是第 1 题、第 4 题、第 5 题、第 8 题，考查的是有理数运算、整式运算、一次函数与二次函数有关性质。考查图形与几何内容的有 4 道试题，分别是第 2 题、第 3 题、第 6 题、第 7 题，考查的是轴对称与中心对称的概念、平行线的性质和判定、中位线性质定理及相似三角形性质、垂径定理等知识，其中第 7 题改变了以往考查圆的问题的模式，以传统地域文化“陕西老碗”为背景命题。解答题第 17 题在考查常规作图基础上稍有变化，第 20 题考查一元一次方程的应用。第 21 题、第 22 题、第 23 题、第 25 题在阅读量（含图像、表格、图形信息）和运算难度上有所增加，注重考查学生读、写、算的基本能力，数据处理能力，以及运用数学知识解决实际问题的能力。第 24 题有关圆的解答题避开了与切线相关的问题，体现出考查方式的变化与创新。第 26 题聚焦核心素养，突出对“发现、提出、分析和解决问题的能力”的考查。

3. 素养导向，全面育人。

试题中第 21 题、第 22 题、第 23 题、第 25 题、第 26 题以真实新颖的实际问题为背景，基于测量景观灯的高度、胸径与树高的函数建构、校园农场中西红柿成长的统计分析、学校图书楼拱门设计、工业新区修路设计等问题，选材源于现实生活，引导学生用数学语言来表达、求解和解释实际问题，学生在解决这些问题的同时，能够感受到数学源于生活又服务于生活，学会用数学的眼光观察现实世界、用数学的思维思考现实世界、用数学的语言表达现实世界，提升学以致用的能力。

在 2024 年的复习备考中，应注重以下几点：

1. 注重能力立意，培养数学学习能力。

注重以知识为载体对学生的抽象能力、推理能力、几何直观、运算能力、数据观念、模型观念等数学核心素养的培养。

（1）重视数学运算。

初中数学运算包括对数字的计算、估值和近似计算，对式子恒等变形，对特殊几何图形的计算等。历年来数学中考试题注重结合具体的解题过程，考查数学的基本方法和基本算理。这些试题删繁就简，不堆砌技巧，突出了对数学的理解、把握和灵活应用。运算看似很简单，但需要对运算有深刻的理解，并提高运算能力，这样有助于学生数学能力的形成，也有助于学生在解题中领悟数学的本质。

（2）通过图形变换与几何证明，展现直观想象。

空间观念是从经验活动中建立起来的，学生的生活经验是他们发展空间观念的基础。因此应注重培养学生的空间观念，观察是空间观念发展的一种有效途径，操作是发展空间观念的重要办法。

（3）通过论证与推断猜测类试题，培养逻辑推理能力。

推理能力既包括合情推理，如归纳、类比、统计推理等，又包括演绎推理。因此，在平时的学习和备考中，应重视能全面展现演绎推理和合情推断或猜测的试题。

（4）利用统计图表和统计量，锻炼数据分析与处理意识。

要求学生能够运用数据对描述信息作出推断，发展统计观念，提高由数据引发思考、推测可能的结果以及自觉想到运用统计的方法解决有关问题的意识。重视通过创设现实问题情境锻炼学生对数据的收集、整理和分析能力。

2. 关注数学思想的渗透。

作为策略性知识的数学思想是数学知识在更高层次上的抽象与概括，它不仅蕴涵在数学知识形成、发展和应用的过程中，而且渗透在数学教与学的过程中。在备考中，既应重视考查抽象、推理、数学模型的试题，也要重视考查数形结合、方程与函数、分类讨论等数学思想的试题。

3. 提高应用数学知识解决问题的能力。

数学知识不仅源于数学内部系统还来源于社会生活实际，同时又被应用于实践。关注数学与现实生活的联系有助于提高学生学习的积极性，有助于培养学生的应用意识与解决问题的能力，有助于增进学生对数学的理解与认识。因此，应逐步提高学生应用数学知识解决实际问题的能力。

目录

第一部分　基础知识

第二部分　课程培优

基础知识的学习和掌握

是形成和发展核心素养的基石

2024年初中终结性练习

第一部分 基础知识

以课程标准为指导 按层次拓展复习

数学

教师教学用书

目录

第一部分　基础知识

第一部分 基础知识

第 1 讲　实数及其运算

知识点 1　实数的分类

1. 按定义分

- 实数
  - 有理数（有限小数或无限循环小数）
    - 整数
      - 正整数
      - <u>0</u>
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数（无限不循环小数）
    - 正无理数
    - 负无理数

2. 按正负分

- 实数
  - 正实数
    - 正有理数
      - 正整数
      - 正分数
    - 正无理数
  - <u>0</u>
  - 负实数
    - 负有理数
      - 负整数
      - 负分数
    - 负无理数

知识点 2　实数的相关概念

名称	定义	性质
数轴	规定了①<u>原点</u>、②<u>正方向</u>和③<u>单位长度</u>的直线叫作数轴	(1)数轴上两个点表示的数，右边的总比左边的④<u>大</u>；(2)数轴上的点与实数具有⑤<u>一一对应</u>的关系；(3)数轴上位于原点两侧，到原点距离相等的点表示的数⑥<u>互为相反数</u>，这两个数的⑦<u>绝对值</u>相等
相反数	只有⑧<u>符号</u>不同的两个数互为相反数	(1)互为相反数的两个数 a，b 表示：$a=$⑨<u>$-b$</u>；$a+b=$⑩<u>0</u>； (2)0 的相反数是⑪<u>0</u>
倒数	如果两个数的⑫<u>乘积为 1</u>，那么称这两个数互为倒数	(1)⑬<u>0</u>没有倒数；(2)一个非零数 a 的倒数为⑭<u>$\frac{1}{a}$</u>

续表

名称	定义	性质
绝对值	数轴上表示实数 a 的点到原点的⑮__距离__叫作实数 a 的绝对值,记作 $\|a\|$	$\|a\|=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0),\end{cases}$ 注意:绝对值具有非负性

知识点3 实数的大小比较

1. 数轴上两个点表示的数,右边的总比左边的__大__。

2. 正数大于 0,负数小于 0,正数大于一切负数,两个负数中绝对值大的反而__小__。

知识点4 科学记数法

1. 科学记数法的表示形式:__$a\times10^n$__。

2. a 和 n 的确定

(1)a 的确定:a 是整数位只有一位的数,即 $1\leqslant|a|<10$。

(2)n 的确定:当一个数的绝对值大于 10 时,n 是正整数,其值等于原数的整数位数__减 1__,或等于原数变为 a 时,小数点向左移动的位数;当一个数的绝对值小于 1 时,n 是负整数,n 的绝对值等于原数左起第一个非零数字前__所有零的个数__(包括__小数点前的零__),或等于原数变为 a 时,小数点向右移动的位数。

知识点5 平方根、算术平方根和立方根

1. 平方根、算术平方根和立方根

名称	含义	表示	性质
平方根	如果一个数 x 的平方等于 a,那么这个数 x 叫作 a 的①__平方根__	实数 $a(a\geqslant0)$ 的平方根表示为②__$\pm\sqrt{a}$__	(1)一个正数有两个平方根,它们③__互为相反数__;0 的平方根是④__0__;负数没有平方根; (2)平方根等于它本身的数是⑤__0__
算术平方根	如果一个正数 x 的平方等于 a,那么这个正数 x 叫作 a 的⑥__算术平方根__	实数 $a(a\geqslant0)$ 的算术平方根表示为⑦__$\sqrt{a}$__	(1)一个正数有一个正的算术平方根(双重非负性);0 的算术平方根是⑧__0__;负数没有算术平方根; (2)算术平方根等于它本身的数是⑨__0 和 1__
立方根	如果一个数 x 的立方等于 a,那么这个数 x 叫作 a 的⑩__立方根__	实数 a 的立方根表示为⑪__$\sqrt[3]{a}$__	(1)所有的数都有一个立方根,且与原数同号; (2)立方根等于它本身的数是⑫__0 和 ±1__

2. 开方

(1)求一个数 a 的平方根的运算,叫作开平方,其中 a 叫作被开方数;

(2)求一个数 a 的立方根的运算,叫作开立方,其中 a 叫作被开方数。

知识点 6　实数的运算

1. 加法：(1) 同号两数相加，取相同的符号，并把__绝对值相加__；

(2) 异号两数相加，绝对值相等时和为 0；绝对值不相等时，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值__减去__较小的绝对值。

2. 减法：减去一个数，等于加上这个数的__相反数__，即 $a-b=a+$__$(-b)$__。

3. 乘法：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘，即 $a\times b=ab$，$a\times(-b)=-ab$。（注意：任何数与 0 相乘，积仍为 0）

4. 除法：除以一个不等于 0 的数，等于乘这个数的倒数，即 $a\div b=a\times$__$\frac{1}{b}$__$(b\neq0)$。（注意：0 除以任何不等于 0 的数，仍得 0）

5. 乘方：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个a}$，表示 n 个 a 相乘。（注意：$n\cdot a=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n个a}$，表示 n 个 a 相加）

6. 实数混合运算的运算顺序：先算乘方，再算乘除，最后算加减，有括号的先算括号里面的；同级运算要按照从左到右的顺序依次进行。

第 2 讲　整式及因式分解

知识点 1　整式的相关概念

1. 代数式：用运算符号把数和字母连接而成的式子。

2. 单项式：(1) 定义：由数或字母的积所组成的代数式叫作单项式。（单独一个数或字母也是单项式）

(2) 系数：单项式中的__数字因数__。

(3) 次数：单项式中__所有字母__指数的和。

3. 多项式：(1) 定义：几个单项式的和叫作多项式。

(2) 项：多项式中的每个__单项式__。

(3) 次数：多项式中__次数最高的项的次数__。

4. 整式：__单项式__和__多项式__统称为整式。

知识点 2　整式的运算

1. 整式的加减运算

(1) 同类项：所含__字母__相同，并且__相同字母的指数__也相同的项。

(2) 合并同类项：把同类项合并成一项。

(3) 合并同类项法则：把同类项的系数相加，字母和字母的__指数__不变。如 $2xy^2+xy^2=$__$3xy^2$__。

(4) 去括号：括号前是“$+$”号，去括号后，括号内各项都不变号，如 $a+(b+c)=a$__$+$__b__$+$__c；括号前是“$-$”号，去括号后，括号内各项都变号，如 $a-(b+c)=a$__$-$__b__$-$__c。

（5）整式加减的步骤：先去括号，再合并同类项。

2. 幂的运算（m,n 为正整数）

（1）同底数幂的乘法：底数不变，指数相加，$a^m\cdot a^n=$ a^{m+n}；

（2）同底数幂的除法：底数不变，指数相减，$a^m\div a^n=$ a^{m-n} （$a\neq0$）；

（3）幂的乘方：底数不变，指数相乘，$(a^m)^n=$ a^{mn}；

（4）积的乘方：把积中的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，$(ab)^n=$ a^nb^n。

3. 整式的乘除运算

（1）单项式乘单项式：把它们的系数、同底数幂分别相乘，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式，如 $2a^2b\cdot ab^2=$ $2a^3b^3$。

（2）单项式乘多项式：根据乘法分配律用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加，如 $m(a+b+c)=$ $ma+mb+mc$。

（3）多项式乘多项式：先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加，如 $(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb$。

（4）乘法公式

完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$；

平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

（5）单项式除以单项式：把系数与同底数幂分别相除作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式。

（6）多项式除以单项式：先把这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加。

4. 整式的运算顺序：先算乘方，再算乘除，最后算加减，有括号的先算括号里面的；同级运算要按照从左到右的顺序依次进行。

知识点 3　因式分解

1. 定义：把一个多项式化成几个整式的积的形式，这种变形叫作这个多项式的因式分解，也叫把这个多项式分解因式。

2. 因式分解的方法

（1）提公因式法：

公因式的确定：
- 系数：取各项系数的 最大公因数
- 字母：取各项相同的 字母或因式
- 次数：取各项相同字母或因式的 最低次数

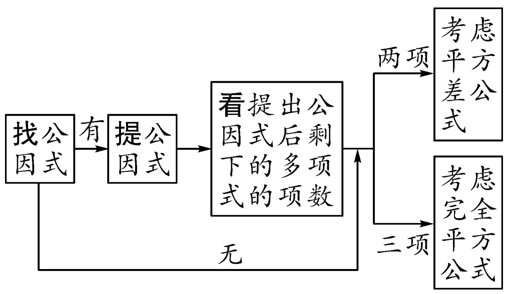
（2）公式法

完全平方公式：$a^2+2ab+b^2=$ $(a+b)^2$，$a^2-2ab+b^2=$ $(a-b)^2$；

平方差公式：$a^2-b^2=$ $(a+b)(a-b)$；

立方和（差）公式：$a^3\pm b^3=(a\pm b)\cdot(a^2\mp ab+b^2)$。

3. 因式分解的一般步骤



温馨提示　因式分解时一定要分解到每个因式都不能再分解为止。

第 3 讲　分式

知识点 1　分式的概念及性质

1. 分式：一般地，用 A,B 表示两个整式，$A\div B$ 可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式，如果 B 中含有__字母__，那么称 $\frac{A}{B}$ 为分式。

2. 分式 $\frac{A}{B}$ 有意义的条件：__$B\neq0$__。

3. 分式 $\frac{A}{B}$ 值为 0 的条件：__$A=0$ 且 $B\neq0$__。

4. 分式的基本性质：分式的分子与分母都乘（或除以）同一个不等于零的整式，分式的值__不变__。

5. 符号法则：分式中，分式本身、分子、分母三者中有两者同时改变符号，分式的值__不变__。

6. 最简分式：分式的分子和分母中没有__公因式__的分式。

知识点 2　分式的运算

1. 分式的乘法：两个分式相乘，把分子相乘的积作为积的分子，把分母相乘的积作为积的分母，即 $\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=$__$\frac{b\cdot d}{a\cdot c}$__$(a\neq0,c\neq0)$。

2. 分式的除法：两个分式相除，把除式的分子和分母颠倒位置后再与被除式相乘，即 $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=$__$\frac{b\cdot c}{a\cdot d}$__$(a\neq0,c\neq0,d\neq0)$。

3. 分式的乘方：分式的乘方要把分子、分母分别乘方，即 $\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$（$n$ 为正整数，$a\neq0$）。

4. 分式的加减法

（1）同分母的分式相加减，__分母__不变，把__分子__相加减；

（2）异分母的分式相加减，先通分，化为同分母的分式，然后再按同分母分式的加减法法则进行计算；

（3）整式与分式相加减，可以把整式看作分母为 1 的分式，通分后再加减。

5. 分式运算的顺序

（1）分式的混合运算，先算乘方，再算乘除，最后算加减，如果有括号先算括号里边的；

（2）分式的化简求值题，要先化简，再代入字母的值进行求值。

第 4 讲　二次根式

知识点 1　二次根式的相关概念

1. 二次根式：形如 $\sqrt{a}(a\geqslant0)$ 的式子。

2. 二次根式 $\sqrt{a}$ 有意义的条件：__$a\geqslant0$__。

3. 最简二次根式满足的条件

(1)被开方数不含__分母__;(2)被开方数中不含能__开得尽方__的因数或因式。

知识点 2 二次根式的性质

1. $\sqrt{a}$具有双重非负性,即$\begin{cases}a\geqslant 0,\\ \sqrt{a}\geqslant 0;\end{cases}$

2. $(\sqrt{a})^2=$__a__$(a\geqslant 0)$;

3. $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\ \underline{\ -a\ }(a<0);\end{cases}$

4. 积的算术平方根:$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$;

5. 商的算术平方根:$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$。

知识点 3 二次根式的运算

1. 二次根式的加减:先将二次根式化为最简二次根式,再将被开方数相同的二次根式合并;

2. 二次根式的乘法:$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$;

3. 二次根式的除法:$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$。

知识点 4 二次根式的估算(夹逼法)

二次根式估算的一般步骤:

(1)对二次根式进行平方,如$(\sqrt{7})^2=7$;

(2)找出与平方后所得数字相邻的两个开平方能开得尽的整数,如$4<7<9$;

(3)对以上两个整数求算术平方根,如$\sqrt{4}=2,\sqrt{9}=3$;

(4)确定这个二次根式值的范围,如$2<\sqrt{7}<3$。

第 5 讲 一次方程(组)

知识点 1 等式的基本性质

性质 1:等式两边加(或减)同一个数(或式子),结果仍相等。

如果 $a=b$,那么 $a\pm c=$__$b\pm c$__。(对应解方程的移项)

性质 2:等式两边乘同一个数,或除以同一个不为 0 的数,结果仍相等。

如果 $a=b$,那么__ac__$=bc$;(对应解方程的去分母)

如果 $a=b(c\neq 0)$,那么 $\underline{\frac{a}{c}}=\frac{b}{c}$。(对应解方程的系数化为 1)

知识点 2 一元一次方程及其解法

1. 一元一次方程:只含有__一__个未知数,并且未知数的次数都是__1__,等号两边都是整式的方程。

2. 一般形式:$ax+b=0(a\neq 0)$。

3. 解一元一次方程的步骤

(1)去分母:方程中未知数系数为分

数，去分母时，在方程两边都乘各分母的__最小公倍数__；

(2)去括号：注意括号外的符号，若是负号，则去括号后，括号内的每一项都要__变号__；

(3)移项：把含有未知数的项移到方程的一边，其他各项都移到方程的另一边，注意移项要__变号__；

(4)合并同类项：注意找准同类项，合并时，系数相加减，字母及其指数__不变__；

(5)系数化为1：等号两边同时除以未知数的系数。

知识点3　二元一次方程(组)及其解法

1. 相关概念

(1)二元一次方程：含有__两__个未知数，并且含有未知数的项的次数都是__1__的方程。

(2)二元一次方程的解：使二元一次方程等号两边的值相等的两个未知数的值。

(3)二元一次方程组：共含有两个未知数的两个一次方程所组成的一组方程。

(4)二元一次方程组的解：二元一次方程组的两个方程的公共解。

2. 二元一次方程组的解法

(1)思路：二元一次方程组$\xrightarrow[\text{转化}]{\text{消元}}$一元一次方程。

(2)常用消元方法

①代入消元法

一变：选取一个方程，用其中一个未知数表示另一个未知数；二代：将所得的式子代入另一个方程中，消元转化为一元一次方程；三解：解所得的一元一次方程；四回代：将一元一次方程的解代入方程组中求出另一个未知数。

②加减消元法

当方程组中同一个未知数的系数__相同或互为相反数__时，利用相减或相加即可达到消元的目的，化为一元一次方程求解即可。当系数不同也不互为相反数时，可通过找同一未知数系数的最小公倍数，将系数变成相同或互为相反数，再用此方法求解。

知识点4　一次方程(组)的实际应用

列一次方程(组)解决实际问题的一般步骤：

(1)审：审清题意，分清已知量、未知量；

(2)设：一般用x表示一个未知数，其他未知数用含x的代数式或y来表示；

(3)列：根据__等量关系__列方程(组)，注意量的单位要统一；

(4)解：解方程(组)，求出未知数的值；

(5)验：检验所得的结果是否符合实际；

(6)答：规范作答，注意单位名称。

第 6 讲　分式方程

知识点 1　分式方程及其解法

1. 定义：分母中含有__未知数__的__方程__叫作分式方程。

2. 解分式方程的一般步骤：

一化：分式方程 $\xrightarrow[\text{给方程两边同乘(最简公分母)}]{\text{去分母}}$ 整式方程；

二解：解__整式方程__；

三检验：将整式方程的根 $x=a$ 代入__最简公分母__，若不为 0，则 $x=a$ 是分式方程的根；若为 0，则 $x=a$ 是分式方程的增根；

四写根：$x=a$ 是原分式方程的根或原分式方程无解。

3. 增根：去分母后的整式方程的根，使得原分式方程的分母为__0__的根。

知识点 2　分式方程的实际应用

列分式方程解决实际问题的一般步骤：

(1)审：__审清题目中的等量关系__；

(2)设：__设未知数__；

(3)列：__列分式方程__；

(4)解：__解分式方程__；

(5)验：__检验所得解是否是分式方程的解以及是否符合实际__；

(6)答：__写出答案__。

第 7 讲　一元二次方程

知识点 1　一元二次方程及其解法

1. 一元二次方程：只含有__一个__未知数，并且未知数的最高次数是__2__的整式方程。

2. 一元二次方程的一般形式是__$ax^2+bx+c=0$__(a,b,c 为常数，$a\neq0$)。

3. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式为__$\Delta=b^2-4ac$__。

$b^2-4ac>0\Leftrightarrow$一元二次方程有__两个不相等__的实数根。

__$b^2-4ac=0$__$\Leftrightarrow$一元二次方程有两个相等的实数根。

__$b^2-4ac<0$__$\Leftrightarrow$一元二次方程没有实数根。

4. 直接开平方法解一元二次方程

(1)概念：如果 $x^2=4$，那么 $x=\pm\sqrt{4}$，即 $x=\pm2$，像这种根据__平方根__的意义直接开方求一元二次方程解的方法叫作直接开平方法。

(2)直接开平方法解一元二次方程的一般步骤：

①将方程转化为 $x^2=p$ 或 $(mx+n)^2=p(m\neq0)$ 的形式；

②分情况求解：当 $p>0$ 时，$x=\pm\sqrt{p}$ 或 $x=\frac{-n\pm\sqrt{p}}{m}$；当 $p=0$ 时，$x_1=x_2=0$ 或 $x=-\frac{n}{m}$；当 $p<0$ 时，方程无实数根。

5. 配方法解一元二次方程

(1)概念：将 $ax^2+bx+c=0$ 配成 $(x+m)^2=p$ 的形式来解一元二次方程的方法叫作配方法。

(2)配方法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一般步骤：

①将二次项系数化为1，得 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$；

②将常数项移到方程右边，即 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$；

③方程两边都加上一次项系数一半的平方，即 $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，配成完全平方式，即 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$；

④当等号右边为非负数，方程两边同时开平方，得 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

6. 公式法解一元二次方程

(1)概念：对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，如果 $b^2-4ac\geqslant0$，那么方程有两个根为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，这个公式叫作一元二次方程的求根公式。利用求根公式，可以由一元二次方程的系数 a,b,c 的值直接求方程的解，这种解一元二次方程的方法叫作公式法。

(2)公式法解一元二次方程的一般步骤：

①将方程化为一般形式，并确定 a,b,c 的值；

②求出判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值，判断根的情况；

③当 $\Delta\geqslant0$ 时，把 a,b,c 的值代入求根公式求解；当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根。

7. 因式分解法解一元二次方程

(1)概念：将方程化为一般形式后对左边先因式分解，使方程化为两个一次因式的乘积等于0的形式，再使这两个一次因式分别等于0，从而实现降次，这种解一元二次方程的方法叫作因式分解法。

(2)因式分解法解一元二次方程的一般步骤：

①移项，将方程右边化为0；

②化积，把方程左边分解为两个一次因式的乘积；

③转化，令两个一次因式分别为0，转化成两个一元一次方程；

④求解，解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解。

8. 一元二次方程根与系数的关系：若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根为 x_1 和 x_2，则方程的两个根 x_1,x_2 和系数 a,b,c 的关系为 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$。

知识点2　一元二次方程的实际应用

列一元二次方程解决实际问题的步骤:(1)审:审清题意找等量关系;(2)设:设定未知数;(3)列:列出一元二次方程;(4)解:解一元二次方程;(5)验:检验所得解是否为原方程的解,是否符合题意;(6)答:写出答案,回答题目中的问题。

第8讲　不等式(组)

知识点1　不等式的性质

性质1. 不等式两边加(或减)同一个数(或式子),不等号的方向__不变__,即如果 $a>b$,那么 $a\pm c>b\pm c$。

性质2. 不等式两边乘(或除以)同一个正数,不等号的方向__不变__,即如果 $a>b,c>0$,那么 $ac>bc\left(或\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right)$。

性质3. 不等式两边乘(或除以)同一个负数,不等号的方向__改变__,即如果 $a>b,c<0$,那么 $ac<bc\left(或\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right)$。

知识点2　一元一次不等式

1. 一元一次不等式:含有__一个__未知数,并且未知数的次数是__1__的不等式。

2. 解一元一次不等式的一般步骤

步骤	具体做法	变形依据
去分母	不等式两边同乘各分母的__最小公倍数__	同乘正数,则依据不等式的性质2 同乘负数,则依据不等式的性质3
去括号	括号前的数乘括号内的每一项	乘法分配律或去括号法则

续表

步骤	具体做法	变形依据
移项	把含有未知数的项移到不等式的一边,常数项移到另一边	__不等式的性质1__
合并同类项	把不等式化成__$Ax>B$ 或 $Ax<B(A\neq0)$__的形式	合并同类项法则
系数化为1	不等式两边同除以__未知数的系数__,得到不等式的解集	当未知数的系数为正数时,依据不等式的性质2;当未知数的系数为负数时,依据不等式的性质3

知识点3　一元一次不等式组

1. 一元一次不等式组的相关概念

把几个含有相同未知数的__一元一次不等式__合起来,就组成一个一元一次不等式组。一般地,几个一元一次不等式的解集的公共部分叫作由它们组成的一元一次不等式组的解集。

2. 解一元一次不等式组的一般步骤:(1)分别求出不等式组中各不等式的__解集__;(2)将各不等式的解集在__数轴__上表示出来;(3)在数轴上找出各不等式的解集的公共部分,这个公共部分就是不等式组的解集。

3. 一元一次不等式组的整数解

（1）一元一次不等式组的整数解是指不等式组的解集中的整数；

（2）求一元一次不等式组的整数解的一般步骤：先求出不等式组的解集，再从解集中找出所有的 整数解 。

知识点 4　一元一次不等式（组）的实际应用

列一元一次不等式（组）解决实际问题的一般步骤：（1）审题；（2）设未知数；（3）列不等式（组）；（4）解不等式（组）；（5）检验并写出答案。

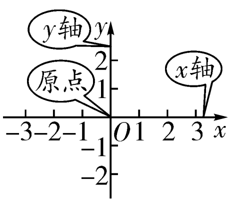
第 9 讲　平面直角坐标系与函数概念

知识点 1　平面直角坐标系

1. 有序数对的概念

用两个数来表示一个确定的位置，其中两个数各自表示不同的含义，我们把这种 有顺序 的两个数 a 与 b 组成的数对，叫作有序数对，记作 (a,b)。

2. 平面直角坐标系的有关概念

有关概念	具体内容	示意图
平面直角坐标系	在同一平面内画两条互相 垂直 且有公共 原点 的数轴组成平面直角坐标系	
两轴	水平 的数轴称为 x 轴或横轴，习惯上取向右为正方向； 竖直 的数轴称为 y 轴或纵轴，取向上为正方向	
原点	两数轴的交点为平面直角坐标系的原点	
坐标平面	坐标系所在的平面	

3. 象限

建立了平面直角坐标系后，坐标平面就被 x 轴和 y 轴分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分（如图 1-9-1），每个部分称为象限，依次叫作 第一象限 ， 第二象限 ， 第三象限 和 第四象限 。（注意：坐标轴上的点和原点不在象限内）

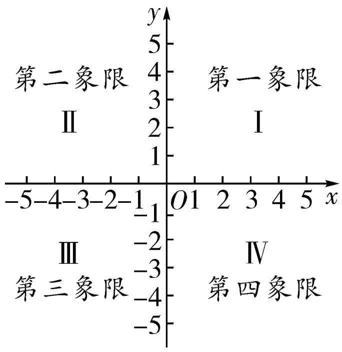


图 1-9-1

4. 点的坐标

（1）概念：如图 1-9-2，对于坐标平面内任意一点 A，由点 A 分别向 x 轴、y 轴作垂线，若垂足在 x 轴、y 轴上对应的数分别为 a,b，则 a,b 分别叫作点 A 的 横坐标和纵坐标 ，有序数对 (a,b) 叫作点 A 的 坐标 ，记作 $A(a,b)$。

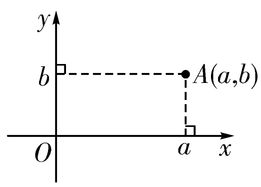


图 1-9-2

(2)几何意义:如图1-9-2,点 A 到 x 轴的距离为__纵坐标__的绝对值,即 $|b|$;点 A 到 y 轴的距离为__横坐标__的绝对值,即 $|a|$;点 A 到原点的距离为 $\sqrt{a^2+b^2}$。

(3)坐标平面上的点与有序数对是一一对应的。

5. 平面直角坐标系中点的坐标特征

(1)各象限内的点:

点 $P(x,y)$ 在第一象限 $\xleftrightarrow{\text{特征}}$ __$(+,+)$__;

点 $P(x,y)$ 在第二象限 $\xleftrightarrow{\text{特征}}$ __$(-,+)$__;

点 $P(x,y)$ 在第三象限 $\xleftrightarrow{\text{特征}}$ __$(-,-)$__;

点 $P(x,y)$ 在第四象限 $\xleftrightarrow{\text{特征}}$ __$(+,-)$__。

(2)坐标轴上点的坐标特征:

①点 $P(a,b)$ 在 x 轴上 $\Leftrightarrow$ __$b=0$__;

②点 $P(a,b)$ 在 y 轴上 $\Leftrightarrow$ __$a=0$__;

③点 $P(a,b)$ 在原点 $\Leftrightarrow$ __$a=0,b=0$__。

(3)两坐标轴夹角平分线上点的坐标特征:

①第一、三象限两坐标轴夹角平分线上的点 $\Leftrightarrow$ 横、纵坐标分别__相等__;

②第二、四象限两坐标轴夹角平分线上的点 $\Leftrightarrow$ 横、纵坐标互为__相反数__。

(4)平行于坐标轴的直线上点的坐标特征:

①平行于 x 轴的直线上的点 $\Leftrightarrow$ __纵坐标__相等;

②平行于 y 轴的直线上的点 $\Leftrightarrow$ __横坐标__相等。

6. 用坐标表示地理位置

利用平面直角坐标系绘制区域内一些地点分布情况平面图的一般过程:

(1)建立坐标系,选择一个适当的__参照点__为原点,确定 x 轴、y 轴的正方向;

(2)根据具体问题确定__单位长度__;

(3)在坐标平面内画出这些点,写出各点的__坐标__和各个地点的__名称__。

7. 点的平移与对称

(1)在平面直角坐标系中,将点 $P(x,y)$ 向右(或向左)平移 a 个单位长度,可以得到对应点__$(x+a,y)$ 或 $(x-a,y)$__;

(2)将点 $P(x,y)$ 向上(或向下)平移 b 个单位长度,可以得到对应点__$(x,y+b)$ 或 $(x,y-b)$__;

(3) $P(a,b)\xrightarrow{\text{关于 } x \text{ 轴对称}}$ __$P'(a,-b)$__;

(4) $P(a,b)\xrightarrow{\text{关于 } y \text{ 轴对称}}$ __$P'(-a,b)$__;

(5) $P(a,b)\xrightarrow{\text{关于原点对称}}$ __$P'(-a,-b)$__。

知识点2 变量与函数

1. 常量与变量

(1)常量:在某一变化过程中,数值始终__不变__的量为常量。

(2)变量:在某一变化过程中,数值发生__变化__的量为变量。

2. 函数

(1)概念:一般地,在一个变化过程中,如果有两个变量 x 与 y,并且对于 x 的每一个确定的值,y 都有__唯一确定的值__与其对应,那么我们就说 x 是自变量,y 是 x 的函数。如果当 $x=a$ 时,$y=b$,那么 b

叫作当自变量的值为 a 时的函数值。

(2)函数自变量的取值范围

①函数自变量的取值范围是指使函数有意义的自变量的取值的＿全体＿。

②函数自变量取值范围的确定

类型	举例	自变量取值范围
整式型	$y=x-1$	＿全体实数＿
分式型	$y=\frac{1}{x-1}$	分母不为0，即＿$x\neq1$＿
二次根式型	$y=\sqrt{x+1}$	被开方数大于或等于0，即＿$x\geqslant-1$＿
分式+根式型	$y=\frac{a}{\sqrt{x}}$	需要同时满足：被开方数大于或等于0，分母不为0，即＿$x>0$＿
负整数指数幂或零指数幂型	$y=x^{-1}$ 或 $y=x^0$	底数不为0，即＿$x\neq0$＿

(3)函数的解析式

用关于＿自变量＿的数学式子表示函数与自变量之间的关系是描述函数的常用方法。这种式子叫作函数的解析式。例如：$y=50-0.1x$。

知识点3　函数的图像

1. 函数的图像

(1)概念：一般地，对于一个函数，如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的＿横、纵坐标＿，那么坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个函数的图像。

(2)描点法画函数图像的一般步骤：

①列表：列表给出一些自变量的值及其对应的＿函数值＿；

②描点：在平面直角坐标系中，以自变量的值为＿横坐标＿，相应的函数值为＿纵坐标＿，描出表格中数值对应的各点；

③连线：按照横坐标由小到大的顺序，把所描出的各点用平滑曲线连接起来。

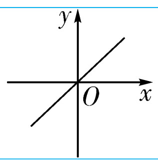
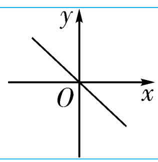
2. 函数的表示方法：解析式法、列表法、图像法。

第10讲　一次函数

知识点1　正比例函数的图像与性质

1. 正比例函数：一般地，形如＿$y=kx$（k 是常数，$k\neq0$）＿的函数，叫作正比例函数，其中＿k＿叫作比例系数。

2. 正比例函数的图像与性质

函数	$y=kx$(k 是常数，$k\neq0$)	
	$k>0$	$k<0$
大致图像		

续表

图像特征	图像是经过原点的一条①＿直线＿	
经过象限	第一、三象限	第二、四象限
增减性	y 随 x 的增大而②＿增大＿	y 随 x 的增大而③＿减小＿

3. 正比例函数图像的画法

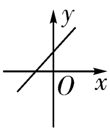
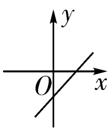
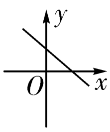
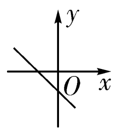
(1)确定正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 上除原点外一点；

(2)过该点与原点画一条直线,这条直线即为正比例函数 $y=kx$ 的图像。

知识点 2 一次函数的图像与性质

1. 一次函数:一般地,形如 $y=kx+b$ (k,b 是常数,$k\neq0$)的函数,叫作一次函数。特别地,当一次函数 $y=kx+b$ 中的 $b=0$ 时,$y=kx$ 为正比例函数,所以说正比例函数是一种特殊的一次函数。

2. 一次函数的图像与性质

函数	$y=kx+b$(k,b 是常数,$k\neq0$)			
	$k>0$		$k<0$	
	$b>0$	$b<0$	$b>0$	$b<0$
大致图像				
	与 y 轴交于正半轴	与 y 轴交于负半轴	与 y 轴交于正半轴	与 y 轴交于负半轴
经过的象限	第一、二、三象限	第一、三、四象限	第一、二、四象限	第二、三、四象限
增减性	y 随 x 的增大而①增大		y 随 x 的增大而②减小	
与坐标轴的交点坐标	与 x 轴的交点坐标是③$\left(-\frac{b}{k},0\right)$; 与 y 轴的交点坐标是④$(0,b)$			

3. 一次函数图像的画法

(1)两点法:选取满足一次函数解析式的两点,过这两点画一条直线;

(2)平移法:一次函数 $y=kx+b$ 的图像是由正比例函数 $y=kx$ 的图像向上($b>0$)或向下($b<0$)平移 $|b|$ 个单位长度得到的。

知识点 3 一次函数解析式的确定

1. 利用待定系数法确定一次函数解析式的一般步骤:

(1)设一次函数的解析式为 $y=kx+b$ ($k\neq0$);

(2)找到图像上的点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,将坐标代入函数解析式,得到关于 k,b 的二元一次方程组 $\begin{cases}y_1=kx_1+b,\\y_2=kx_2+b;\end{cases}$

(3)解方程组可得 k,b 的值;

(4)将求得的 k,b 的值代入所设的解析式。

2. 平移法确定一次函数的解析式

平移前	平移方式($m>0$)	平移后
$y=kx+b$ ($k\neq0$)	向左平移 m 个单位长度	$y=k(x+m)+b$
	向右平移 m 个单位长度	$y=k(x-m)+b$
	向上平移 m 个单位长度	$y=kx+b+m$
	向下平移 m 个单位长度	$y=kx+b-m$

知识点 4 一次函数与方程(组)、不等式的关系

1. 一次函数与一元一次方程

(1)任何一个以 x 为未知数的一元一次方程都可以变形为 $ax+b=0$ ($a\neq0$)的形式,所以解一元一次方程相当于在一次函数 $y=ax+b$ ($a\neq0$)的函数值为 0 时,求自变量 x 的值;

（2）从图像上看，解一元一次方程 $ax+b=0(a\neq0)$ 相当于确定一次函数 $y=ax+b(a\neq0)$ 的图像与__x 轴__交点横坐标的值。例如：如图 1-10-1，点 P 的坐标$(x,0)$中 x 的值即为方程 $ax+b=0$ 的解。

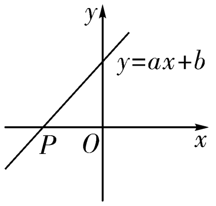


图 1-10-1

2. 一次函数与二元一次方程组

（1）从“数”的角度看：解二元一次方程组相当于考虑自变量为何值时，相应的两个函数的__函数值__相等，并求出这个__函数值__；

（2）从“形”的角度看：解二元一次方程组相当于确定两条相应直线交点的__横坐标与纵坐标__。一般地，如果一个二元一次方程组有唯一解，那么这个解就是方程组对应的两条直线的交点坐标。例如：如图 1-10-2，点 P 的横坐标 x 和纵坐标 y 的值即为方程组$\begin{cases}y_1=k_1x+b_1,\\y_2=k_2x+b_2\end{cases}$的解。

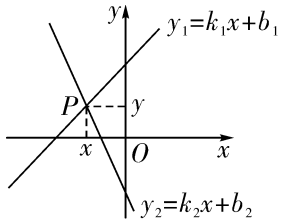


图 1-10-2

3. 一次函数与一元一次不等式

（1）从“数”的角度看：

①不等式 $ax+b>0$ 的解集是在一次函数 $y=ax+b$ 中，当 $y>0$ 时，x 的__取值范围__；

②不等式 $ax+b<0$ 的解集是在一次函数 $y=ax+b$ 中，当 $y<0$ 时，x 的__取值范围__；

（2）从“形”的角度看：

①不等式 $ax+b>0$ 的解集是一次函数 $y=ax+b$ 的图像位于__x 轴上方__的部分对应的点的横坐标的值；

②不等式 $ax+b<0$ 的解集是一次函数 $y=ax+b$ 的图像位于__x 轴下方__的部分对应的点的横坐标的值。

第 11 讲　一次函数的应用

知识点　一次函数的实际应用

利用一次函数解决实际应用的步骤：

（1）审题，确定__自变量和因变量__；

（2）明确变量之间的__数量关系__；

（3）根据题意确定__自变量__的取值范围；

（4）根据数量关系确定__一次函数__的解析式；

（5）根据__一次函数的性质__解决相应问题；

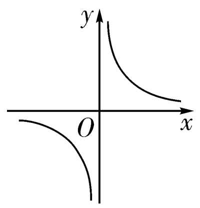
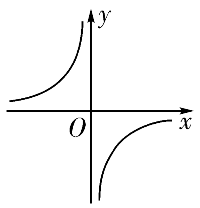
（6）对答案进行__检验__，符合题意后作答。

第 12 讲　反比例函数

知识点 1　反比例函数的定义

一般地,形如 $y=\frac{k}{x}$ (k 是常数,$k\neq0$)的函数叫作反比例函数,其他表示形式有 $y=kx^{-1}$ 或 $xy=k$。

知识点 2　反比例函数的图像及其性质

解析式	$y=\frac{k}{x}$(k 是常数,$k\neq0$)	
k 值	$k>0$	$k<0$
图像		
所在象限	第①一、三象限	第②二、四象限
增减性	在每一象限内,y 随 x 的增大而③减小	在每一象限内,y 随 x 的增大而④增大
取值范围	x 的取值范围是⑤ $x\neq0$;y 的取值范围是⑥ $y\neq0$	
图像特点	两个分支都⑦无限接近于坐标轴,但是永远不与 x 轴、y 轴相交	
对称性	中心对称图形:图像关于⑧坐标原点中心对称	
	轴对称图形:图像关于直线⑨ $y=x$ 对称,也关于直线⑩ $y=-x$ 对称	

知识点 3　确定反比例函数的解析式

1. 利用待定系数法确定反比例函数解析式

(1)设所求反比例函数解析式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$;

(2)找出图像上一点(a,b),代入 $y=\frac{k}{x}$;

(3)确定反比例函数解析式 $y=\frac{ab}{x}$。

2. 利用定义确定反比例函数解析式

利用定义求反比例函数解析式时,令自变量 x 的指数等于 -1,并且注意反比例函数解析式中 $k\neq0$。例:若函数 $y=(m-1)x^{m+2}$ 是反比例函数,则 $m+2=-1$ 且 $m-1\neq0$。

3. 利用面积确定反比例函数解析式

已知面积时可考虑反比例函数中 k 的几何意义,由面积得 $|k|$,再结合图像所在象限判断 k 的符号,从而得到 k 的值,代入解析式即可。

知识点 4　反比例函数 k 的几何意义

在 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图像上任意一点 $P(x,y)$,过这一点分别作 x 轴、y 轴的垂线 PA,PB,两垂线与坐标轴围成的矩形 $PAOB$ 的面积为 $|k|$。

如图 1-12-1①和②,$S_{矩形PAOB}=PA\cdot PB$

$=|y|\cdot|x|=|xy|=|k|$；

同理可得 $S_{\triangle OPA}=S_{\triangle OPB}=$ $\underline{\frac{1}{2}|k|}$ 。

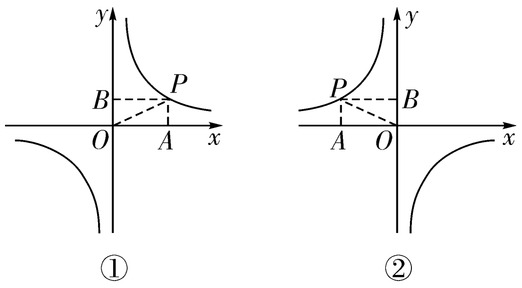


图 1-12-1

知识点5　反比例函数的综合应用

1. 反比例函数的实际应用

(1)根据实际情况建立反比例函数模型；

(2)利用待定系数法或跨学科公式确定函数解析式；

(3)根据反比例函数的性质解决实际问题。

温馨提示　实际问题中的反比例函数，一般自变量的取值范围会因实际情况受到限制，这时反比例函数图像可能是双曲线的一支或一段，因此要注意自变量和函数的取值范围。

2. 反比例函数与一次函数的综合

(1)确定交点坐标：联立两个函数解析式求解；

(2)确定函数解析式：先确定交点坐标，再利用待定系数法求解。

第13讲　二次函数

知识点1　二次函数的定义

一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数且 $a\neq0$)的函数叫作二次函数。

知识点2　二次函数的图像及性质

1. 二次函数的性质：(1)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是对称轴平行于(包括重合)y 轴的抛物线。

(2)对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $a>0$ 时⇔抛物线开口向上⇔顶点为抛物线最低点；当 $a<0$ 时⇔抛物线开口向下⇔顶点为抛物线最高点。

(3)抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标为 $\underline{\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)}$，抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的顶点坐标为 $\underline{(h,k)}$。二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 用配方法可化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，其中 $h=$ $\underline{-\frac{b}{2a}}$，$k=$ $\underline{\frac{4ac-b^2}{4a}}$。

(4)抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$。因为抛物线是以对称轴为轴的轴对称图形，所以抛物线上对称点的连线的垂直平分线是抛物线的对称轴，对称轴与抛物线的交点是抛物线的顶点。若抛物线上有两点 $A(m,n)$，$B(p,n)$的纵坐标相等，则抛物线的对称轴为直线 x

$=\frac{m+p}{2}$。

(5)增减性：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像的增减性分对称轴左右两侧描述(数形结合理解二次函数图像的增减性)。

若 $a>0$，当 x $>-\frac{b}{2a}$ 时(在对称轴 右 侧)，y 随 x 的增大而增大，当 x $<-\frac{b}{2a}$ 时(在对称轴 左 侧)，y 随 x 的增大而减小；若 $a<0$，当 x $<-\frac{b}{2a}$ 时(在对称轴 左 侧)，y 随 x 的增大而增大，当 x $>-\frac{b}{2a}$ 时(在对称轴 右 侧)，y 随 x 的增大而减小。

(6)最大(小)值：①若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图像的顶点横坐标在自变量的取值范围内，当 $a>0$ 时，函数有最 小 值，且当 $x=$ $-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最小值}=$ $\frac{4ac-b^2}{4a}$；

当 $a<0$ 时，函数有最 大 值，且当 $x=$ $-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最大值}=$ $\frac{4ac-b^2}{4a}$；

②若顶点横坐标不在自变量的取值范围内，则考虑在端点处是否取得最值。

2. 二次函数图像的画法：(1)列表；(2)描点；(3)连线。

知识点3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$的图像与 a,b,c 的关系

1. a 决定抛物线开口方向及大小：a $>$ 0⇔抛物线开口向上；a $<$ 0⇔抛物线开口向下；$|a|$越大，抛物线开口 越小；$|a|$越小，抛物线开口 越大；

2. a,b 决定抛物线对称轴的位置：当 $b=0$ 时，对称轴为 y 轴；当 $ab>0$ 时，对称轴在 y 轴的左侧；当 $ab<0$ 时，对称轴在 y 轴的 右侧；

3. c 决定抛物线与 y 轴交点的位置：c $>$ 0⇔交点在 y 轴的正半轴；c $<$ 0⇔交点在 y 轴的负半轴；c $=$ 0⇔交点在原点；

4. 由 $x=1$ 时的点的位置决定 $a+b+c$ 的符号；由 $x=-1$ 时的点的位置决定 $a-b+c$ 的符号。

点$(1,a+b+c)$在 x 轴上方⇔$a+b+c$ $>$ 0；

点$(1,a+b+c)$在 x 轴下方⇔$a+b+c$ $<$ 0；

点$(-1,a-b+c)$在 x 轴上方⇔$a-b+c$ $>$ 0；

点$(-1,a-b+c)$在 x 轴下方⇔$a-b+c$ $<$ 0；

5. 由 $-\frac{b}{2a}$与 1 的大小关系确定$b+2a$ 的符号；由 $-\frac{b}{2a}$与 -1 的大小关系确定 $b-2a$ 或 $2a-b$ 的符号；

6. 由 b^2-4ac 的符号决定抛物线与 x 轴的交点个数：$b^2-4ac>0$，抛物线与 x 轴有两个交点；$b^2-4ac=0$，抛物线与 x 轴只有一个交点；$b^2-4ac<0$，抛物线与 x 轴无交点。

知识点4 二次函数的解析式

二次函数解析式的三种形式

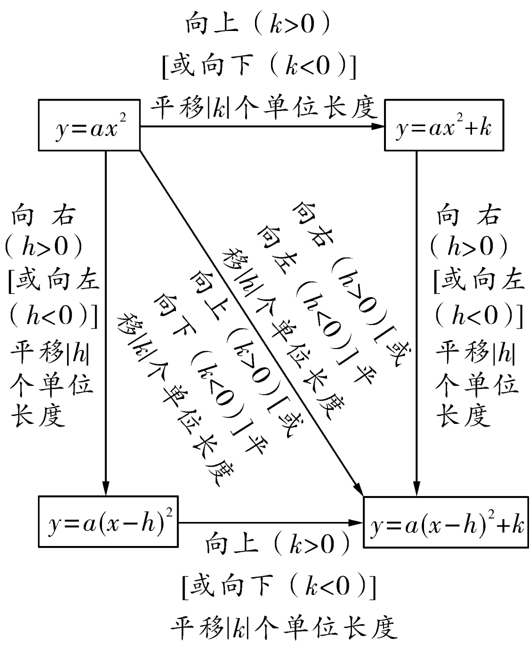
(1)一般式：$y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数且 $a\neq0$)；

(2)顶点式:$y=a(x-h)^2+k(a,h,k$是常数且$a\neq0)$;

(3)两点式$y=a(x-x_1)(x-x_2)$ ($a\neq0$,a,x_1,x_2是常数;x_1 x_2是二次函数图像与x轴交点的横坐标,两点式只限于二次函数图像与x轴有交点的情形)。

知识点 5 二次函数图像的平移与对称

对不同的二次函数,如果二次项系数a相同,那么抛物线的形状大小完全相同,只是位置不同。反之,若几条抛物线的形状大小相同,则二次项系数a的绝对值相同。抛物线的平移、对称、旋转过程中,$|a|$的值不变,一般是把二次函数的解析式化为顶点式,抓住关键点(顶点)的变化,顶点决定抛物线的位置。



其平移对称规律归纳如下:

(1)抛物线$y=ax^2+bx+c$向上平移n($n>0$)个单位长度后的解析式是__$y=ax^2+bx+c+n$__;

抛物线$y=ax^2+bx+c$向下平移n($n>0$)个单位长度后的解析式是__$y=ax^2+bx+c-n$__;

(2)抛物线$y=ax^2+bx+c$向左平移n($n>0$)个单位长度后的解析式是__$y=a\left(x+n+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$__;

抛物线$y=ax^2+bx+c$向右平移n($n>0$)个单位长度后的解析式是__$y=a\left(x-n+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$__;

(3)抛物线$y=ax^2+bx+c$关于x轴对称的抛物线解析式是__$y=-ax^2-bx-c$__;(方法是将原解析式中的__x__不变,把__y__转换为__$-y$__,再整理得到变换后的解析式)

(4)抛物线$y=ax^2+bx+c$关于y轴对称的抛物线解析式是__$y=ax^2-bx+c$__。(方法是将原解析式中的__y__不变,把__x__转换为__$-x$__,再整理得到变换后的解析式)

知识点 6 二次函数与一元二次方程的关系

1. 二次函数与一元二次方程的关系

若二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图像与x轴有交点,则交点的横坐标就是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的解。反过来,解一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$也可以看成已知二次函数$y=ax^2+bx+c$,当$y=0$时,求自变量x的值,即二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像与x轴交点的横坐标。

一般地,已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的函数值$y=k$,求自变量x的值,可看作解

一元二次方程 $ax^2+bx+c=k$；反过来，解一元二次方程 $ax^2+bx+c=k$ 可看作已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y=k$，求自变量 x 的值。

2. 直线与抛物线的交点问题

抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与一次函数 $y=kx+b_1(k\neq0)$ 的交点问题实际上是方程组 $\begin{cases}y=kx+b_1,\\ y=ax^2+bx+c\end{cases}$ 的解的问题。将 $y=kx+b_1$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 中，若 $\Delta>0\Leftrightarrow$ 抛物线与直线有两个交点；若 $\Delta=0\Leftrightarrow$ 抛物线与直线只有一个交点；若 $\Delta<0\Leftrightarrow$ 抛物线与直线没有交点。

特别地，抛物线与 x 轴的交点问题实际上是抛物线与直线 $y=0$（x 轴）的交点问题。$\Delta>0\Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴有两个交点；$\Delta=0\Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴只有一个交点；$\Delta<0\Leftrightarrow$ 抛物线与 x 轴没有交点。

3. 抛物线与 x 轴的两个交点之间的距离公式：当 $\Delta>0$ 时，设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴两个交点为 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，则 x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$，所以 $AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4c}{a}}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$。

第 14 讲　二次函数的综合

知识点 1　二次函数的最值

1. 若自变量的取值范围是全体实数，则二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在顶点处取得最大值（或最小值），即当 $x=$ <u>$-\dfrac{b}{2a}$</u> 时，$y_{最值}=$ <u>$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$</u>。

2. 若自变量的取值范围为 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$，则（1）对称轴在该范围内，最值分别在顶点和一端点处取得；（2）对称轴不在该范围内，最值在 $x=x_1$，$x=x_2$ 处取得。

知识点 2　二次函数的应用问题

遇到二次函数的应用问题时，认真审题，建立二次函数的数学模型，进而利用二次函数的知识解决问题。解决二次函数应用问题的一般方法：

（1）理解问题；

（2）分析问题中的变量和常量以及它们之间的关系；

（3）用数学的方式表示出它们的关系；

（4）求解；

（5）检查结果的合理性。

第 15 讲　相交线与平行线

知识点 1　直线、线段

1. 直线、线段的性质

（1）直线的基本性质：两点确定一条直线；

（2）线段的基本性质：两点之间，线段最短。（连接两点之间线段的长度，叫作这两点之间的距离）

2. 线段的中点

如图 1-15-1，若 M 为线段 AB 的中点，则有 $AM = MB = \frac{1}{2}AB$ 或者 $AB = 2AM = 2MB$。

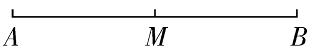


图 1-15-1

3. 线段的和与差

如图 1-15-2，B 是线段 AC 上的一点，则有 $AB + BC = AC$，$AB = AC - BC$，$BC = AC - AB$。

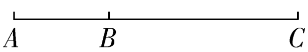


图 1-15-2

知识点 2　角的相关概念及性质

1. 角的定义：有公共端点的两条射线组成的图形叫作角，角也可以看成是由一条射线绕它的端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形。

2. 角的分类：角按从大到小可分为：周角、平角、钝角、直角、锐角。其中 1 周角 = 360° = 2 平角 = 4 直角。

3. 角的换算：度、分、秒是常用的度量单位：1° = 60′，1′ = 60″。度、分、秒之间的进制是 60。

4. 余角和补角：（1）余角：如果两个角的和是 90°，那么称这两个角互为余角，简称互余，也可以说其中一个角是另一个角的余角。

温馨提示　数学中互余的两个角都是锐角，不能是直角、钝角或平角等。余角是不能单独出现的，只能说 $\angle A$ 和 $\angle B$ 互为余角或者 $\angle A$ 是 $\angle B$ 的余角，但不能说 $\angle A$ 为余角。

（2）补角：如果两个角的和是 180°，那么称这两个角互为补角。

（3）性质：同角（或等角）的余角相等。同角（或等角）的补角相等。一个角的补角比这个角的余角大。

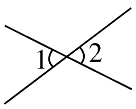
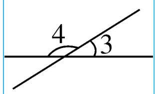
5. 角平分线：（1）定义：从一个角的顶点出发，把这个角分成两个相等的角的射线，叫作这个角的平分线。

（2）角平分线的性质定理：角平分线上的点到角两边的距离相等。

（3）角平分线的性质定理的逆定理：角的内部到角两边距离相等的点在这个角的平分线上。

知识点3 相交线

1. 对顶角、邻补角

类别	图形	顶点	边的关系	大小关系
对顶角		有公共顶点	∠1 的两边与∠2 的两边互为反向延长线	对顶角___相等___，如∠1 = ∠2
邻补角		有公共顶点	∠3 与∠4 有一条公共边，另一边互为反向延长线	邻补角___互补___，如∠3 + ∠4 = 180°

温馨提示 (1)对顶角是成对出现的，对顶角是具有特殊位置关系的两个角；

(2)若∠α与∠β是对顶角，则一定有∠α = ∠β；反之，若∠α = ∠β，则∠α与∠β不一定是对顶角；

(3)若∠α与∠β互为邻补角，则一定有∠α + ∠β = 180°；反之，若∠α + ∠β = 180°，则∠α与∠β不一定是邻补角；

(4)两直线相交形成的四个角中，每一个角的邻补角有两个，而对顶角只有一个。

2. 同位角、内错角、同旁内角

平面内，两条直线被第三条直线所截形成八个角，它们构成了同位角、内错角与同旁内角。如图 1-15-3，直线 a，b 被直线 l 所截。

(1)∠1 与∠5 在截线 l 的同侧，同在被截直线的上方，具有这种位置关系的∠1 和∠5 叫作___同位角___(位置相同)。

(2)∠3 与∠5 在截线 l 的两旁(交错)，在被截直线之间(内)，具有这种位置关系的∠3 和∠5 叫作___内错角___(位置在内且交错)。

(3)∠4 与∠5 在截线 l 的同侧，在被截直线之间(内)，具有这种位置关系的∠4 和∠5 叫作___同旁内角___。

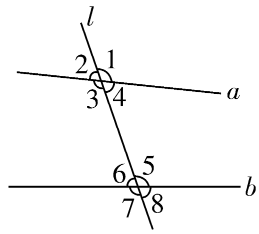


图 1-15-3

3. 垂线的有关概念及其性质

(1)定义：当两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角时，就说这两条直线___互相垂直___，其中的一条直线叫作另一条直线的垂线，它们的交点叫作___垂足___。

如图 1-15-4，直线 AB，CD 相互垂直，记作 $AB \perp CD$，垂足为 O。

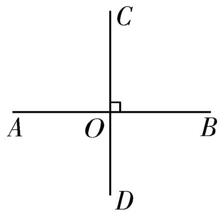


图 1-15-4

(2)垂线的性质：①在同一平面内，过一点有且只有___一条___直线与已知直线___垂直___。

②连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，___垂线段___最短。简称：___垂线段最短___。(尺规作图常用)

(3)点到直线的距离

直线外一点到这条直线的___垂线段的

长度，叫作点到直线的距离。

（4）线段垂直平分线

①定义：经过线段的＿中点＿，并且＿垂直＿于这条线段的直线，叫作这条线段的垂直平分线，简称“中垂线”。中垂线可以看成到线段两个端点距离相等的点的集合，中垂线是线段的一条对称轴。

②性质：线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离＿相等＿。

③逆定理：到线段两端点距离相等的点在这条线段的＿垂直平分线＿上。

知识点4　平行线

1. 平行线的定义：在同一平面内，不相交的两条直线叫作平行线，直线 a 与直线 b 互相平行，记作：$a/\!/b$。（在同一平面内，不重合的两条直线只有相交和平行两种位置关系）

2. 平行公理及推论

平行公理：经过直线外一点，＿有且只有＿一条直线与已知直线平行。

平行公理的推论：如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行，即若 $a/\!/c$，$b/\!/c$，则有 $a/\!/b$。

3. 平行线的判定

同位角相等，两直线平行；内错角相等，两直线平行；同旁内角互补，两直线平行。

4. 平行线的性质

两直线平行，同位角相等；两直线平行，内错角相等；两直线平行，同旁内角互补。

知识点5　命题

1. 命题：＿判断＿一件事情的语句。

2. 真命题：如果题设成立，那么＿结论＿一定成立的命题。

3. 假命题：如果题设成立时，＿不能＿保证结论一定成立的命题。

4. 互逆命题：在两个命题中，如果第一个命题的＿题设＿是另一个命题的＿结论＿，而第一个命题的结论是第二个命题的题设，那么这两个命题叫作互逆命题。

第16讲　三角形与特殊三角形

知识点1　三角形的分类、边角关系

1. 三角形的分类

$$\text{三角形（按边分）}\begin{cases}\text{三边都不相等的三角形}\\ \text{等腰三角形}\begin{cases}\text{底和腰不相等的等腰三角形}\\ \text{等边三角形}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{三角形（按最大角分）}\begin{cases}\text{锐角三角形}\\ \text{直角三角形}\\ \text{钝角三角形}\end{cases}$$

2. 三角形三边关系

文字语言	数学语言（$\triangle ABC$ 三边长为 a,b,c）	理论依据	应用
三角形两边的和①__大于__第三边	在 $\triangle ABC$ 中，$a+b>c$；$b+c>a$；$a+c>b$	③__两点之间，线段最短__	(1)判断三条线段能否组成三角形；注：判断三条线段能否构成三角形，应将两条短线段的和与最长线段作比较；(2)已知三角形的两边，求第三边的取值范围
三角形两边的差②__小于__第三边	在 $\triangle ABC$ 中，$a-b<c$；$b-c<a$；$a-c<b$		

3. 三角形角的关系

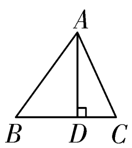
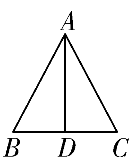
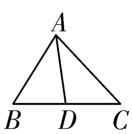
（1）三角形内角和定理：三角形的三个内角和等于__$180°$__。

（2）推论：①直角三角形两个锐角__互余__，两个锐角__互余__的三角形是直角三角形；②三角形外角性质：三角形的任何一个外角等于与其__不相邻__的两个内角的和；③三角形的一个外角__大于__任何一个和它不相邻的内角。

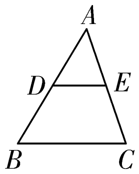
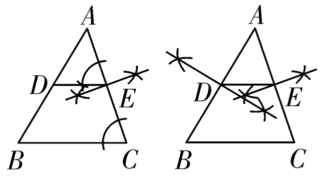
温馨提示 同一个三角形中，等角对等边；等边对等角；大角对大边；大边对大角；等角的补角相等；等角的余角相等。

4. 三角形的稳定性：三角形具有稳定性，而四边形不具有稳定性。三角形的稳定性具有广泛的应用，例如：桥梁、起重机、“人”字形屋顶等。

知识点2 三角形中的重要线段

名称	图示	性质	拓展
高线	 AD 是 $\triangle ABC$ 的高线	$AD\perp BC$，即 $\angle ADB=\angle ADC=90°$	①__垂心__：三角形三条高线所在直线的交点
中线	 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线	(1) $BD=DC=\frac{1}{2}BC$；(2) $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$	重心：三角形三条中线的交点；重心到三角形顶点的距离等于它到顶点对边中点距离的2倍
角平分线	 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线	$\angle BAD=\angle CAD=$②__$\frac{1}{2}\angle BAC$__	内心：三角形三条角平分线的交点；内心到三角形三边距离相等，内心即三角形内切圆的圆心

续表

名称	图示	性质	拓展
中位线	 DE 是△ABC 的中位线	$DE/\!/BC$ 且 $DE=\frac{1}{2}BC$	 ① ② 求作三角形中位线时，既可以找到一边中点（作垂直平分线找中点），再作平行（如图①）；也可以找到两边中点连接（如图②）

知识点 3 等腰三角形的性质与判定

等腰三角形	性质	(1)等腰三角形的两腰①___相等___； (2)等腰三角形两底角②___相等___； (3)等腰三角形的顶角的角平分线、③___底边上的高线___、④___底边上的中线___互相重合（简称“三线合一”）； (4)等腰三角形是轴对称图形，有⑤___一条___对称轴
	判定	(1)（定义法）有两条边相等的三角形是等腰三角形； (2)有两个角相等的三角形是等腰三角形（简称“等角对等边”）

知识点 4 等边三角形的性质与判定

等边三角形	性质	(1)等边三角形的三边①___相等___； (2)等边三角形的三个内角②___相等___，都等于③___60°___； (3)等边三角形是轴对称图形，且有④___3___条对称轴； (4)等边三角形任意一边上的高线、中线及其对角的角平分线互相重合（简称“三线合一”）
	判定	(1)三条边都⑤___相等___的三角形是等边三角形； (2)三个内角都⑥___相等___的三角形是等边三角形； (3)有一个角是⑦___60°___的等腰三角形是等边三角形
	面积	$S=\frac{1}{2}ah=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$（$a$ 是等边三角形的边长，h 是任意一边上的高）

知识点 5 直角三角形的性质与判定

直角三角形	性质	(1)直角三角形的两锐角互余; (2)直角三角形斜边上的中线等于①__斜边的一半__; (3)30°角所对的直角边等于②__斜边__的一半; (4)勾股定理(由形状得数量):直角三角形两直角边的③__平方和__等于斜边的平方,即 $a^2+b^2=c^2$(a,b 为直角边,c 为斜边)
	判定	(1)有一个角是90°的三角形是直角三角形; (2)有两个角④__互余__的三角形是直角三角形; (3)勾股定理逆定理(由数量得形状):如果三角形三边长为 a,b,c 满足⑤__$a^2+b^2=c^2$__,那么这个三角形是直角三角形
	面积	$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch$($a$,$b$ 为直角边,h 是斜边 c 上的高)

第 17 讲 全等三角形

知识点 1 全等三角形的定义及性质

1. 全等形:能够完全重合的两个图形。

2. 全等三角形:(1)定义:能够完全__重合__的两个三角形叫作全等三角形。把两个全等的三角形重合到一起,重合的顶点叫作对应顶点,重合的边叫作对应边,重合的角叫作对应角。

(2)表示方法:全等的符号为“≌”,如 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$。

3. 全等三角形的性质

(1)全等三角形的对应边相等,全等三角形的对应角__相等__;

(2)全等三角形的周长、面积对应__相等__;

(3)全等三角形对应的中线、高线、角平分线、中位线都__相等__。

知识点 2 全等三角形的判定

三角形全等的判定方法

(1)__三边__分别相等的两个三角形全等(简写成“边边边”或“SSS”);

(2)__两边__和它们的__夹角__分别相等的两个三角形全等(简写成“边角边”或“SAS”);

(3)__两角__和它们的__夹边__分别相等的两个三角形全等(简写成“角边角”或“ASA”);

(4)__两角__分别相等且其中一组等角的__对边__相等的两个三角形全等(简写成“角角边”或“AAS”);

(5)__斜边__和一条__直角边__分别

相等的两个直角三角形全等(简写成“斜边、直角边”或“HL”)。

第 18 讲　解直角三角形

知识点 1　锐角三角函数

锐角三角函数:在 Rt△ABC 中,∠C 是直角,∠A 是△ABC 的一个锐角,如图 1-18-1,(1)∠A 的 对边 与 斜边 的比叫作∠A 的正弦,记作 sin A,即 $\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$;(2)∠$A$ 的 邻边 与 斜边 的比叫作∠A 的余弦,记作 cos A,即 $\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$;(3)∠$A$ 的 对边 与∠A 的 邻边 的比叫作∠A 的正切,记作 tan A,即 $\tan A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\dfrac{a}{b}$。∠$A$ 的 正弦、余弦、正切 都是∠A 的锐角三角函数。

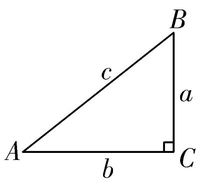


图 1-18-1

知识点 2　直角三角形的边角关系

在 Rt△ABC 中,∠$C=90°$,∠A,∠B,∠C 所对的边分别为 a,b,c。

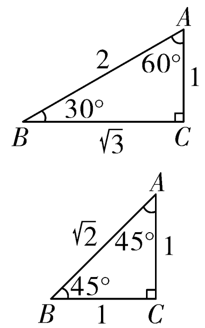
(1)三边之间的关系:直角三角形 两直角边 的平方和等于 斜边的平方;

(2)两锐角之间的关系:直角三角形两锐角 互余;

(3)边、角间的关系:$\sin A=\cos B=\dfrac{a}{c}$;$\cos A=\sin B=\dfrac{b}{c}$;$\tan A=\dfrac{1}{\tan B}=\dfrac{a}{b}$。

知识点 3　特殊角的锐角三角函数值

α 的度数	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



知识点 4　仰角、俯角、坡角、方位角

1. 仰角与俯角:在进行测量时,从下往上看, 视线与水平线 的夹角叫作仰角;从上往下看,视线与水平线的夹角叫作俯角,如图1-18-2①。

2. 坡角与坡度:坡面与 水平面 的夹角叫作坡角,图 1-18-2②中的 α 是坡角;坡面的铅垂高度 h 和水平距离 m 的比叫作坡度,又叫作坡比,用 i 表示;坡度 i 与坡角 α 之间的关系为 $i=\tan\alpha=\dfrac{h}{m}$。

3. 方位角:平面上,过观测点 O 作一条水平线(向右为东)和一条铅垂线(向上

为北),则从 O 点出发的射线与方向标所夹的小于90°的角就是方位角。描述方位角先说南北后说东西;东北方向是北偏东45°。如图1-18-2③,点 A 在点 O 的__北偏西__35°方向上;点 B 在点 O 的__东北__方向上;点 C 在点 O 的__南偏西__60°方向上。

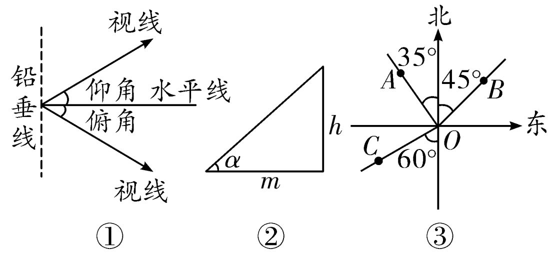


图 1-18-2

第 19 讲　多边形与平行四边形

知识点 1　多边形

1. 多边形

(1)定义:在平面内,由一些线段__首尾顺次相接__组成的封闭图形叫作多边形。

(2)性质

①内角和与外角和:n 边形内角和等于__$(n-2)\times180°(n\geqslant3,n$ 为整数$)$__;外角和等于__360°__;

②多边形的对角线:从 n 边形的一个顶点可引出__$(n-3)$__条对角线,n 边形共有__$\frac{n(n-3)}{2}$__条对角线;

③n 边形$(n>3)$具有不稳定性;

④多边形的内角中最多有__3__个锐角。

2. 正多边形

(1)定义:各个角都__相等__,各条边都__相等__的多边形叫作正多边形。

(2)性质:①正 n 边形每一个内角相等,都等于__$\frac{(n-2)\cdot180°}{n}$__;正 n 边形每一个外角相等,都等于__$\frac{360°}{n}$__;

②正 n 边形有 n 条对称轴;

③对于正 n 边形,当 n 是__奇数__时,是轴对称图形,不是中心对称图形;当 n 是__偶数__时,既是轴对称图形,又是中心对称图形。

知识点 2　平行四边形

1. 定义:__两组对边分别平行的四边形__是平行四边形。

2. 性质

(1)平行四边形的两组对边分别__平行且相等__,两组对角__相等__,邻角__互补__,对角线互相__平分__;

(2)平行四边形是__中心__对称图形,它的对称中心是两条对角线的交点。过__对称中心__的直线等分平行四边形的周长和面积。

3. 平行四边形的判定方法

(1)定义判定:__两组对边分别平行的四边形是平行四边形__;

(2)从边判定:①__两组对边分别相等的四边形是平行四边形__;

②__一组对边平行且相等的四边形是平行四边形__;

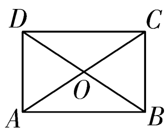
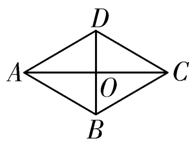
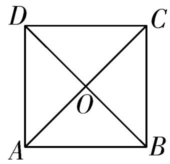
(3)从角判定：两组对角分别相等的四边形是平行四边形；

(4)从对角线判定：对角线互相平分的四边形是平行四边形。

第 20 讲 矩形、菱形和正方形

知识点 1 矩形、菱形和正方形的性质与判定

1. 矩形、菱形和正方形的性质

		矩形	菱形	正方形
图形		 矩形	 菱形	 正方形
性质	边	两组对边分别① 平行 且② 相等	四条边都③ 相等 ；对边④ 平行	四条边都⑤ 相等 ；两组对边分别⑥ 平行
	角	四个角都是⑦ 直角	两组对角分别⑧ 相等	四个角都是⑨ 直角
	对角线	对角线互相平分且⑩ 相等	对角线互相⑪ 垂直且平分 ；每条对角线⑫ 平分 一组对角	对角线互相⑬ 垂直平分 且⑭ 相等 ；每条对角线⑮ 平分 一组对角
	对称性	既是中心对称图形又是轴对称图形，有⑯ 2 条对称轴	既是中心对称图形又是轴对称图形，有⑰ 2 条对称轴	既是中心对称图形又是轴对称图形，有⑱ 4 条对称轴
面积		$S=$ ⑲ $AB\cdot BC$（答案不唯一）	$S=$ ⑳ $\frac{1}{2}AC\cdot BD$（答案不唯一）	$S=$ ㉑ AB^2（答案不唯一）

2. 矩形、菱形和正方形的判定

(1)矩形的判定

①有三个角都是 直角 的四边形是矩形。

②有一个角是 直角 的平行四边形是矩形。

③对角线 相等 的平行四边形是矩形。

(2)菱形的判定

①有一组 邻边 相等的平行四边形是菱形。

②对角线 互相垂直 的平行四边形是菱形。

③ 四 条边都相等的四边形是菱形。

(3)正方形的判定

①四条边都 相等 ，四个角都是 直角 的四边形是正方形。

②有一组邻边 相等 的矩形是正方形。

③有一个角是 直角 的菱形是正方形。

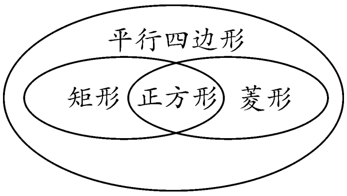
④两条对角线 互相垂直 的矩形是正方形。

⑤两条对角线 相等 的 菱形 是正方形。

⑥对角线互相 垂直 且 相等 的平行四边形是正方形。

知识点 2 矩形、菱形和正方形之间的关系

矩形、菱形和正方形都是特殊的平行四边形，正方形既是特殊的矩形，也是特殊的菱形，它们之间的包含关系如下：



知识点 3 中点四边形

1. 依次连接四边形各边中点所得到的四边形称为中点四边形，中点四边形的形状只与原四边形的对角线有关。

2. 常见结论

(1) 任意四边形 $\xrightarrow{\text{中点四边形}}$ 平行四边形

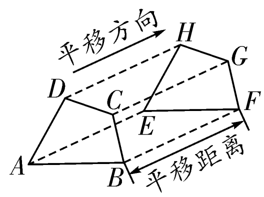
(2) 对角线相等的四边形 $\xrightarrow{\text{中点四边形}}$ 菱形

(3) 对角线互相垂直的四边形 $\xrightarrow{\text{中点四边形}}$ 矩形

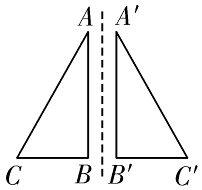
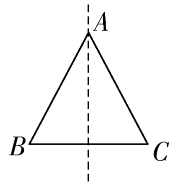
(4) 对角线互相垂直且相等的四边形 $\xrightarrow{\text{中点四边形}}$ 正方形

第 21 讲 图形的变换

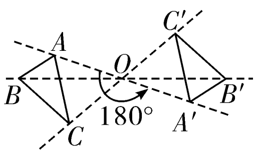
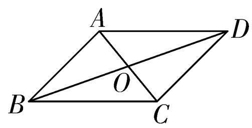
知识点 1 图形的平移

平移的定义	在平面内，把一个图形整体沿某一直线方向移动，会得到一个新的图形，新图形与原图形的形状和大小① 完全相同 ，新图形中的每一点，都是由原图形中的某一点移动后得到的，这两个点是② 对应点 。连接各组对应点的线段平行(或在同一条直线上)且相等。图形的这种移动叫作平移	
平移的要素	(1) 平移的方向：图形上某一点到平移后图形上的③ 对应点 的方向； (2) 平移的距离：图形上某一点到平移后图形上的④ 对应点 的距离	
平移的性质	(1) 图形平移前后，对应线段平行(或在同一直线上)且相等，对应角⑤ 相等 ； (2) 图形平移前后，对应点所连的线段⑥ 平行 (或在同一直线上)且⑦ 相等 ； (3) 平移前后的图形是⑧ 全等图形	

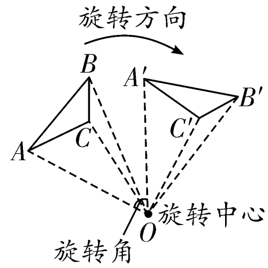
知识点 2 图形的轴对称

名称	轴对称	轴对称图形
图示		
定义	把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形①重合，那么就说这两个图形关于这条直线成轴对称，这条直线叫作②对称轴	如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全③重合，那么这个图形叫作轴对称图形，这条直线就是它的④对称轴
区别	轴对称是指两个图形间的位置关系	轴对称图形是指一个具有轴对称性质的图形
性质	(1)成轴对称的两个图形全等； (2)如果两个图形关于某直线对称，那么对称轴是对应点连线的垂直平分线； (3)两个图形关于某直线对称，如果它们的对应线段或延长线相交，那么交点在对称轴上	

知识点 3 图形的中心对称

名称	中心对称	中心对称图形
图示		
定义	把一个图形绕着某一个点旋转①180°，如果它能够与另一个图形②重合，那么就说这两个图形关于这个点对称或中心对称，这个点叫作③对称中心	把一个图形绕某个点旋转④180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形完全⑤重合，那么这个图形叫作中心对称图形，这个点就是它的⑥对称中心
区别	中心对称是针对两个图形的位置关系	中心对称图形是针对一个具有中心对称性质的图形
性质	(1)关于中心对称的两个图形是⑦全等图形； (2)关于中心对称的两个图形，对称点连线都经过⑧对称中心，并且被对称中心⑨平分； (3)关于中心对称的两个图形，对应线段平行(或在同一直线上)且相等	

知识点 4　图形的旋转

<table>
<tr><td>旋转的定义</td><td>在平面内，把一个图形绕一个定点沿某个方向①　转动　某个角度，这样的图形运动叫作旋转，其中定点叫作②　旋转中心　，转动的角叫作③　旋转角　</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>旋转的三要素</td><td>(1)旋转④　中心　；(2)旋转⑤　方向　；(3)旋转⑥　角　</td></tr>
<tr><td>旋转的性质</td><td>(1)旋转前、后的图形⑦　全等　；
(2)对应点到旋转中心的距离⑧　相等　；
(3)每一组对应点与旋转中心连线所成的夹角都等于⑨　旋转角　</td></tr>
</table>

第 22 讲　图形的相似

知识点 1　比例线段

1. 相关概念

(1)线段的比：如果用同一长度单位量得两条线段 AB，CD 的长度分别是 m，n，那么这两条线段的比就是它们长度的比，即 $AB:CD=m:n$，或写成 $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$。其中，　线段 AB，CD　分别叫作这个线段比的前项和后项。

(2)成比例线段：四条线段 a，b，c，d 中，如果 a 与 b 的比等于 c 与 d 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么这四条线段 a，b，c，d 叫作成比例线段，简称比例线段。

2. 比例的性质

性质 1(基本性质)：如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=$　bc　$(abcd\neq0)$。

性质 2(合比、分比性质)：如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a\pm b}{b}=$　$\frac{c\pm d}{d}$　$(bd\neq0)$。

性质 3(等比性质)：如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$，那么 $\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq0)$。

3. 黄金分割

如图 1-22-1，一般地，点 C 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 $BC(AC>BC)$，如果

$\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，那么称线段 AB 被点 C 黄金分割，点 C 叫作线段 AB 的黄金分割点，其中 AC 与 AB 的比叫作黄金分割比，即 $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

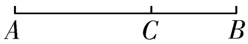


图 1-22-1

4. 平行线分线段成比例

(1)基本事实：两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例。如图 1-22-2①，直线 $a\parallel b\parallel c$，则 $\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$，$\frac{AB}{AC}=\frac{A_1B_1}{A_1C_1}$。

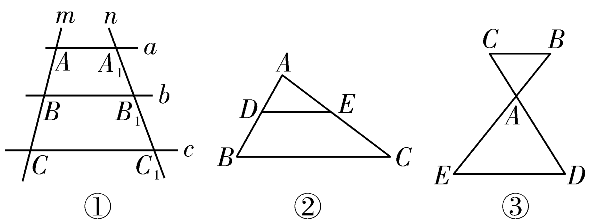


图 1-22-2

(2)推论：平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线)，所得的对应线段成比例。如图 1-22-2②，在 $\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，则 $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}$，$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$。如图 1-22-2③，$DE\parallel BC$，则 $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{DE}{BC}$。

知识点 2　相似三角形的性质

性质 1：相似三角形对应边成___比例___，对应角相等。

性质 2：相似三角形对应高的比、对应中线的比与对应角平分线的比都等于___相似比___。

性质 3：相似三角形的周长比等于___相似比___，相似三角形的面积比等于___相似比的平方___。

知识点 3　相似三角形的判定

相似三角形的判定：(1)平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似。

(2)两角分别___相等___的两个三角形相似。

(3)两边对应成比例且___夹角___相等的两个三角形相似。

(4)三边对应成比例的两个三角形相似。

(5)直角三角形相似的判定定理：

①一个___锐角___对应相等的两个直角三角形相似；

②两组___直角边___对应成比例的两个直角三角形相似；

③斜边和一条直角边对应成比例的两个直角三角形相似。

知识点 4　相似多边形

1. 相似多边形的定义：两个边数相同的多边形，如果它们的角分别相等、边成比例，那么这两个多边形叫作相似多边形。

2. 相似多边形的性质：相似多边形的对应角相等，对应边成比例。相似多边形的对应边的比、对应周长的比等于相似比，对应面积的比等于相似比的平方。

知识点 5　位似

1. 位似的定义：如果两个图形不仅是

相似图形，且对应顶点的连线所在直线相交于一点，并且这点与对应顶点所连线段成比例，那么这样的两个图形叫作位似图形，位似图形对应点连线所在直线的交点叫作位似中心。这时两个相似图形的相似比又叫作位似比。

2. 位似图形的性质：（1）位似图形一定是相似图形，而相似图形不一定是位似图形；（2）位似图形对应点的连线所在直线相交于同一点；（3）位似图形的对应边互相平行或在同一条直线上；（4）位似图形上任意一对对应点到位似中心的距离之比等于相似比。

3. 作位似图形的步骤：（1）确定位似中心；（2）确定原图形中的顶点关于位似中心的对应点；（3）画出新图形。

第 23 讲　投影与视图

知识点 1　投影

1. 投影：一般地，用光线照射物体，在某个平面（地面、墙壁等）上得到的影子叫作物体的投影。

2. 投影的分类：一般根据投影光线的不同分为平行投影与中心投影。由平行光线形成的投影是平行投影；由同一点（点光源）发出的光线形成的投影叫作中心投影。

知识点 2　三视图

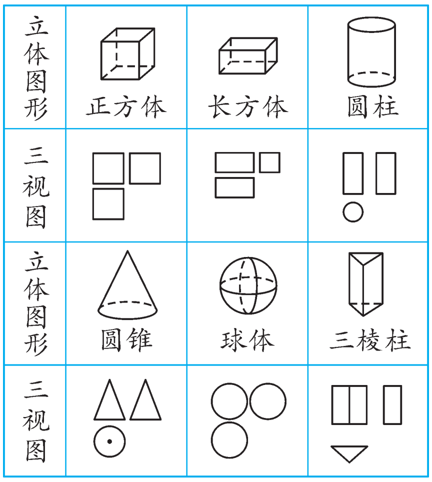
1. 视图：从某一方向观察一个物体时，所看到的平面图形叫作物体的一个视图。

2. 三视图：（1）主视图：在正面内得到的由前向后观察物体的视图；

（2）左视图：在侧面内得到的由左向右观察物体的视图；

（3）俯视图：在水平面内得到的由上向下观察物体的视图。

3. 常见立体图形的三视图：



知识点 3　立体图形的展开与折叠

立体图体是由平面图形围成的，沿着立体图形的一些棱剪开，可以展开成平面图形，这个平面图形就是相应立体图形的平面展开图。同一个立体图形按不同的方式展开，会得到不同的平面展开图。

一个立体图形能展开成平面图形，这个平面图形就可以折叠成相应的立体图形，立体图形的展开与折叠是一对互逆的过程。

第 24 讲　圆的有关概念与性质

知识点 1　圆的有关概念与性质

1. 圆：平面上，到__定点__的距离等于__定长__的所有点组成的图形叫作圆。圆上各点到圆心的距离都等于__半径__。圆既是轴对称图形，又是中心对称图形。

2. 同心圆与等圆：有相同__圆心__的圆叫作同心圆；能够__重合__的两个圆叫作等圆，半径相等的两个圆是等圆。

3. 弦：连接圆上任意两点的__线段__叫作弦，经过__圆心__的弦叫作直径。

4. 弧：圆上任意两点间的__部分__叫作圆弧，简称弧。

5. 圆心角：顶点在__圆心__的角叫作圆心角。

6. 圆周角：顶点在__圆上__，并且两边都与圆相交的角叫作圆周角。

知识点 2　垂径定理及其推论

定理：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧。

推论：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧。

知识点 3　弧、弦、圆心角之间的关系

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等。

知识点 4　圆周角定理及其推论

定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的__圆心角__的一半。

推论：（1）同弧或等弧所对的圆周角__相等__；

（2）半圆（或直径）所对的圆周角是__直角__；90°的圆周角所对的弦是__直径__。

知识点 5　三角形的外接圆

1. 三角形的外接圆：经过三角形三个顶点可以作一个圆，这个圆叫作三角形的外接圆。

2. 三角形外接圆的圆心：外心（三角形三边__垂直平分线__的交点）。

3. 性质：①三角形的外心到三角形的__三个顶点__的距离相等。

②锐角三角形的外心在三角形的内部，直角三角形的外心是斜边的中点，钝角三角形的外心在三角形的外部。

③直角三角形外接圆的半径是斜边的__一半__。

知识点 6　圆内接多边形

1. 定义：如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，那么这个多边形叫作圆内接多边形，这个圆叫作这个多边形的外接圆。

2. 性质：圆内接四边形的对角__互补__，圆内接四边形任意一个外角等于它的__内对角__。

第 25 讲　与圆有关的位置关系

知识点 1　点与圆的位置关系

设圆的半径为 r，平面内任一点到圆心的距离为 d。

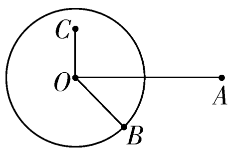


图 1-25-1

（1）点在圆外⇔d ＞ r，如图1-25-1中点 A；

（2）点在圆上⇔d ＝ r，如图1-25-1中点 B；

（3）点在圆内⇔d ＜ r，如图1-25-1中点 C。

知识点 2　直线与圆的位置关系

设圆的半径为 r，圆心到直线的距离为 d，如图 1-25-2：

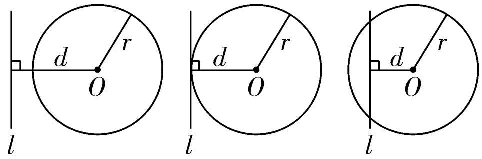


图 1-25-2

（1）直线 l 和⊙O 相离⇔d ＞ r；

（2）直线 l 和⊙O 相切⇔d ＝ r；

（3）直线 l 和⊙O 相交⇔d ＜ r。

知识点 3　切线的性质和判定

1.（1）切线的性质：位置关系：圆的切线 垂直 于过切点的半径。

数量关系：圆心到切线的距离 等于 半径。

（2）切线性质的推论：①经过圆心且垂直于切线的直线必经过 切点 ；②经过切点且垂直于切线的直线必经过 圆心 。

2. 切线的判定

判定方法 1：圆心到直线的距离等于半径时，这条直线就是圆的切线；

判定方法 2：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线；

判定方法 3（定义法）：与圆有唯一公共点的直线是圆的切线。

知识点 4　切线长定理

1. 切线长：经过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间 线段的长 叫作这点到圆的切线长。

2. 切线长定理：从圆外一点可以引圆的 两 条切线，它们的切线长 相等 ，且这一点和圆心的连线 平分 两条切线的夹角。

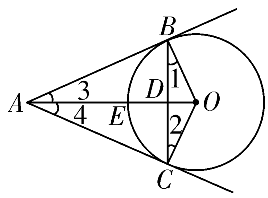


图 1-25-3

如图 1-25-3，过⊙O 外一点 A 可引两

条切线 AB,AC,可得以下结论:①$OB\perp AB$,$OC\perp AC$;②$AB=AC$;③$\angle 3=\angle 4$;④$AO\perp BC$;⑤$BD=CD$;⑥$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$;⑦$\angle 1=\angle 2$。

知识点 5　三角形的内切圆

1. 三角形内切圆:与三角形各边都相切的圆。

2. 三角形的内心:三角形的内切圆圆心是三角形三条__角平分线__的交点(尺规作图常用)。

3. 三角形内心的性质:三角形的内心到三角形的__三条边__距离相等。

4. 如图 1-25-4①,点 O 是△ABC 的内心,∠BOC 和∠A 的角度关系:∠BOC = __$\frac{1}{2}\angle A+90°$__。

5. 知识拓展:如图 1-25-4②,Rt△ABC内切圆的半径:$r=\frac{a+b-c}{2}$(其中 a,b 分别为两直角边长,c 为斜边长)。

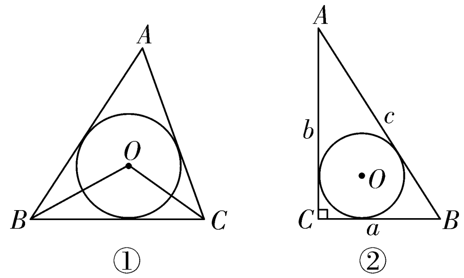


图 1-25-4

第 26 讲　与圆有关的计算

知识点 1　正 n 多边形与圆

相关计算:(1)中心角 θ = __$\frac{360°}{n}$__。

(2)边心距 r = __$\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$__。

(3)正 n 边形的周长 C = __na__。

(4)正 n 边形的面积 S = __$\frac{1}{2}nar$__。

(5)外接圆的半径 R = __$\sqrt{r^2+\frac{1}{4}a^2}$__。

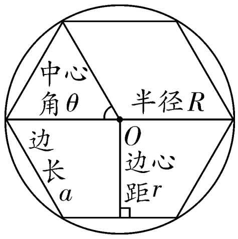


图 1-26-1

知识点 2　扇形面积及弧长的计算

如图 1-26-2,r 为圆的半径,$n°$为$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角的度数,l 是扇形 AOB 的弧长。

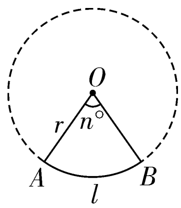


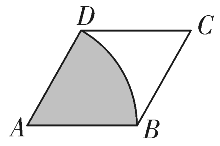
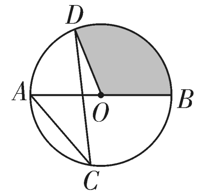
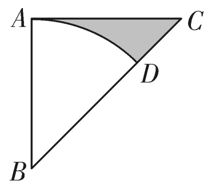
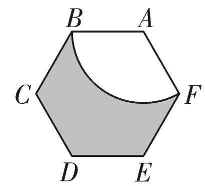
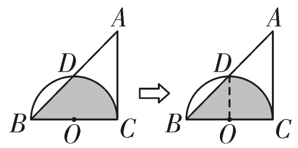
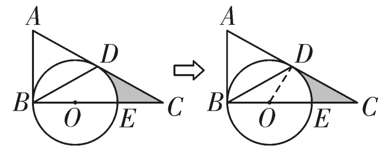
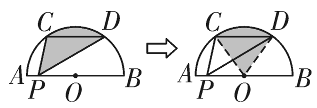
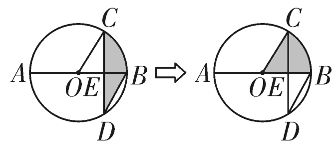
图 1-26-2

(1)弧长公式:圆的周长 C = __$2\pi r$__ ⇒扇形的弧长 l = __$\frac{n\pi r}{180}$__。

(2)面积公式:$S_{\odot O}$ = __πr^2__ ⇒$S_{扇形AOB}$ = __$\frac{n\pi r^2}{360}$__ $=\frac{1}{2}lr$。

知识点 3　应用扇形面积求阴影部分面积的方法

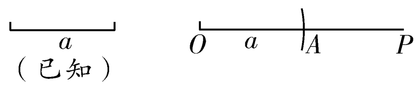
常用的基本思想：转化思想，即把所求的不规则图形的面积转化为规则图形的面积。

方法	图示	
直接公式法	 $S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}BAD}$	 $S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}BOD}$
间接和差法	 $S_{\text{阴影}}=S_{\triangle ABC}-S_{\text{扇形}ABD}$	 $S_{\text{阴影}}=S_{\text{正六边形}ABCDEF}-S_{\text{扇形}BAF}$
分割和差法	 $S_{\text{阴影}}=S_{\triangle OBD}+S_{\text{扇形}COD}$	 $S_{\text{阴影}}=S_{\triangle ODC}-S_{\text{扇形}DOE}$
等积变化法	 ($CD/\!/AB$) $S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}COD}$	 (B 为 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点，E 为 OB 的中点) $S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}BOC}$

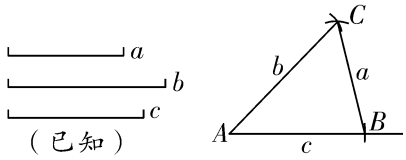
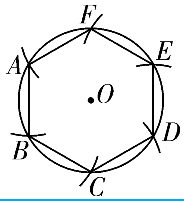
第 27 讲　尺规作图

知识点　五种基本作图以及常见应用

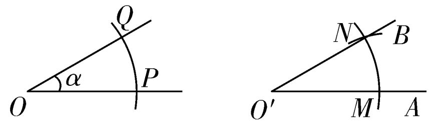
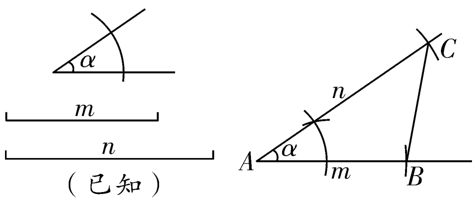
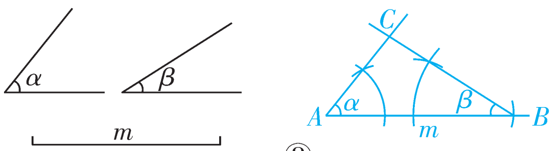
1. 作一条线段等于已知线段（已知线段 a）。

图示	
作法	(1) 作射线 OP； (2) 以点 O 为①__圆心__，a 为②__半径__作弧，交射线 OP 于点 A，OA 即为所求作的线段

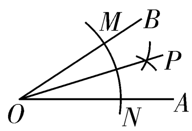
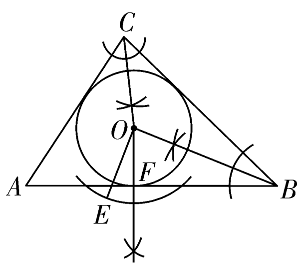
续表

运用	已知三边作三角形： 	作圆的内接正六边形： 

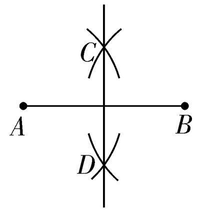
2. 作一个角等于已知角（已知∠α）。

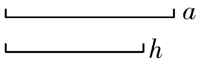
图示	 （已知）	
作法	(1)在∠α上以点①__O__为圆心，适当长为半径作弧，分别交∠α的两边于点P,Q; (2)作②__射线__$O'A$; (3)以点③__O'__为圆心，④__OP__长为半径作弧，交$O'A$于点M; (4)以点⑤__M__为圆心，⑥__PQ__长为半径作弧，交前弧于点N; (5)过点N作⑦__射线__$O'B$，∠$BO'A$即为所求作的角	
运用	已知两边及其夹角作三角形： 	已知两角及其夹边作三角形：  ⑧________

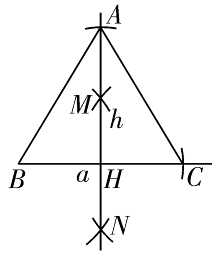
3. 作已知角的平分线（已知∠AOB）。

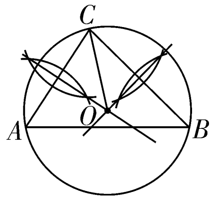
图示	
作法	(1)以点O为圆心，任意长为半径作弧，分别交OA,OB于点N,M; (2)分别以点M,N为①__圆心__，大于②__$\frac{1}{2}MN$__长为半径作弧，两弧相交于点P; (3)作射线OP，OP即为所求作的角平分线
运用	作三角形的内切圆： 

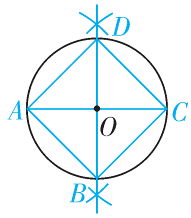
4. 作已知线段的垂直平分线(已知线段 AB)。

<table>
<tr>
<td>图示</td>
<td>


</td>
<td>作法</td>
<td>(1)分别以点 A,B 为圆心,大于$\frac{1}{2}AB$长为半径在 AB 两侧作弧,两弧分别交于点 C,D;
(2)作直线 CD,直线 CD 即为所求作的线段 AB 的垂直平分线</td>
</tr>
<tr>
<td>运用</td>
<td>已知底边及底边上的高线作等腰三角形:


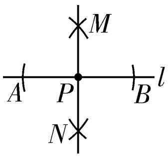
(已知)


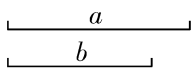
</td>
<td>过不在同一条直线上的三点作圆,即作三角形的外接圆:


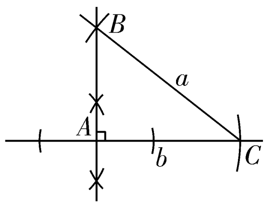
</td>
<td>作圆的内接正方形:


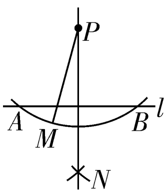
</td>
</tr>
</table>

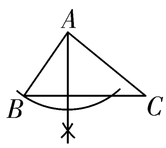
5. 过一点作已知直线的垂线(已知点 P 和直线 l)。

<table>
<tr>
<td>类型</td>
<td>图示</td>
<td>作法</td>
<td>运用</td>
</tr>
<tr>
<td>点在直线上</td>
<td>


</td>
<td>(1)以点 P 为圆心,任意长为半径向点 P 两侧的直线 l 上作弧,交直线 l 于 A,B 两点;
(2)分别以点 A,B 为圆心,大于$\frac{1}{2}AB$长为半径在直线 l 两侧作弧,两弧分别交于点 M,N;
(3)连接 MN,直线 MN 即为所求作的垂线</td>
<td>已知一直角边 b 和斜边 a 作直角三角形:


(已知)


</td>
</tr>
<tr>
<td>点在直线外</td>
<td>


</td>
<td>(1)任意取点 M,使点 P 和点 M 在直线 l 的两侧;
(2)以点①____P____为圆心,②____PM____长为半径作弧,交直线 l 于 A,B 两点;
(3)分别以 A,B 为圆心,大于$\frac{1}{2}AB$长为半径作弧,两弧交于点 M 同侧的点 N;
(4)连接 PN,则直线 PN 即为所求作的垂线</td>
<td>作△ABC 中 BC 边上的高线:


</td>
</tr>
</table>

第 28 讲　统计

知识点 1　全面调查与抽样调查

1. 调查方式

(1)全面调查(普查):为某一特定目的而对所有考察对象进行的__全面调查__。

(2)抽样调查:为某一特定目的而对部分考察对象进行的调查。

2. 调查方式的选取:当受客观条件限制,无法对所有个体进行全面调查时,往往采用__抽样调查__。

3. 抽样调查样本的选取:(1)抽样调查的样本要有__代表性__;(2)抽样调查的样本数目要__足够大__。

知识点 2　总体、个体、样本和样本容量

总体:所要考察对象的__全体__;

个体:组成总体的每一个__考察对象__;

样本:从总体中抽取的__部分个体__;

样本容量:样本中所包括的个体的__数目__。

知识点 3　几种常见的统计图表

1. 条形统计图:根据数量画出长短相应成比例的直条,并按一定顺序排列起来的统计图。

特点:(1)能够显示每组中的__具体数据__;(2)易于比较数据之间的差别。

2. 折线统计图:根据数量描出各点,再把各点用线段顺次连接,以折线上升或下降表示统计数量的增减变化的统计图。

特点:易于显示数据的__变化趋势__。

3. 扇形统计图:用一个圆代表总体,圆中的各个扇形分别代表总体中的不同部分,扇形的大小反映部分在总体中__所占百分比__的大小的统计图。

百分比的意义:在扇形统计图中,每部分占总体的百分比等于该部分所对扇形的圆心角的度数与 360°的比。扇形的圆心角度数 = 360°×部分占总体的百分比。

4. 频数分布直方图

(1)在整理数据时,相同数据出现的__次数__叫作频数;

(2)频数与__数据总数__的比(或者百分比)叫作频率,频数和频率都能够反映每个对象出现的__频繁程度__;

(3)频数分布表、频数分布直方图都能直观、清楚地反映数据在各个小范围内的__分布情况__;

(4)频数分布直方图的绘制步骤:①计算最大值与最小值的__差__;②决定组距与__组数__;③确定分点,常使分点比数据多一位小数,并且把第一组的起点稍微减小一点;④列频数分布表;⑤画频数分布直方图:用横轴表示各分段数据,纵轴反映各分段数据的频数,小长方形的高表示频数,绘制频数分布直方图。

知识点 4　平均数

1. 平均数:一般地,对于 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,把 $\bar{x}=$__$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$__叫作这 n 个数的算术平均数,简称平均数。

2. 加权平均数:一般地,若 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的权分别是 $w_1, w_2, \cdots, w_n$,则 $\bar{x}=$

$\underline{\dfrac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}}$ 叫作这 n 个数的加权平均数。

知识点5 众数、中位数

1. 众数：一组数据中出现次数<u>最多</u>的数据叫作众数。

2. 中位数：将一组数据按由小到大(或由大到小)的<u>顺序排列</u>，处在最中间位置的一个数据(或最中间两个数据的平均数)叫作中位数。

知识点6 方差、标准差、极差

1. 方差：设有 n 个数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，各数据与它们的平均数 $\bar{x}$ 的差的平方和的平均数，叫作这组数据的方差。通常用“s^2”表示，即 $s^2=$ $\underline{\dfrac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$。

2. 标准差：把一组数据方差的算术平方根叫作这组数据的标准差。

3. 极差：一组数据中最大数据与最小数据的差叫作极差。

温馨提示 一组数据的极差、方差或标准差越小，这组数据就越稳定。

第29讲 概率

知识点1 事件的分类

1. 必然事件：在一定条件下，必然会发生的事件，它发生的概率为<u>1</u>。

2. 不可能事件：在一定条件下，必然不会发生的事件，它发生的概率为<u>0</u>。

3. 随机事件：在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件，它发生的概率是0—1之间。

知识点2 概率的计算与应用

1. 概率的计算

(1)公式法：如果在一次试验中，有 n 种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率 $P(A)=\dfrac{m}{n}$。

(2)列举法：①列表法：当一次试验要涉及两个因素，并且可能出现的结果数目较多时，应<u>不重不漏</u>地列出所有可能的结果，通常采用列表法求事件发生的概率。

②画树状图法：当一次试验要涉及3个或<u>更多</u>的因素时，通常采用画树状图来求事件发生的概率。

(3)用频率估计概率：一般地，在大量重复试验中，如果事件 A 发生的频率<u>稳定</u>于 $\dfrac{m}{n}$，那么我们可以估计事件 A 发生的概率 $P(A)=$ $\underline{\dfrac{m}{n}}$。适用条件：当试验的所有可能结果不是有限个，或各种结果发生的可能性不相等时，我们一般要通过统计频率来<u>估计</u>概率。

(4)几何概型：几何概型就是与几何图形有关的概率问题，其计算方法的实质就是求图形的长度比、面积比、体积比等。

2. 概率的应用

概率是和<u>实际</u>结合非常紧密的数学知识，可以对生活中的某些现象作出评判，如解释摸奖、评判游戏活动的<u>公平性</u>、数学竞赛获奖的可能性等，还可以对某些事件作出决策。

第二部分 课程培优

第1讲 实数及其运算

重难点突破

重点1 无理数

无理数的定义：无限不循环小数叫作无理数。说明：无理数是实数中无法精确地用两个整数之比来表示的一种实数。如 π，$\sqrt{2}$等。

常见的4种无理数类型：

(1)开方开不尽的数，如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{4}$等；

(2)π及化简后含π的数，如2π；

(3)具有特定结构的无限不循环小数，如0.010 010 001…(相邻两个1之间依次多一个0)；

(4)化简后含有根式的三角函数值，如$\sin 60°$，$\tan 30°$等。

温馨提示 判断一个数是否为无理数，不在于形式，关键在于化简后的结果。

重点2 绝对值

1. 绝对值的概念在实数范围内与在有理数范围内是一样的。实数a的绝对值就是在数轴上这个数所对应的点与原点的距离。正实数的绝对值是它本身；负实数的绝对值是它的相反数；0的绝对值是0。

2. 去绝对值符号时，先比较绝对值内两数的大小，再根据绝对值的非负性去绝对值符号。

3. (1)绝对值具有非负性，即$|a|\geqslant 0$；(2)若几个数的绝对值的和为0，则每个数都等于0，即$|a|+|b|+\cdots+|m|=0$，则$a=b=\cdots=m=0$；(3)若$|x|=a(a\geqslant 0)$，则$x=\pm a$。

重点3 几种常见的实数运算

运算	法则
乘方	$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个a}$(正数的任何次幂都是正数，负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数)
零次幂	$a^0=1(a\neq 0)$
负整数指数幂	$a^{-p}=\frac{1}{a^p}(a\neq 0,p$为正整数$)$或$a^{-p}=\left(\frac{1}{a}\right)^p(a\neq 0,p$为正整数$)$
常见的算术平方根	$\sqrt{4}=2$，$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$\sqrt{9}=3$，$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{16}=4$，$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
常见的开立方	$\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt[3]{-8}=-2$，$\sqrt[3]{27}=3$，$\sqrt[3]{-27}=-3$，$\sqrt[3]{64}=4$，$\sqrt[3]{-64}=-4$

续表

运算	法则
去绝对值符号	$\|a-b\|=\begin{cases}a-b(a>b),\\0(a=b),\\b-a(a<b)\end{cases}$ （先比较绝对值符号里面两个数的大小，再利用绝对值的非负性去绝对值符号）
-1 的奇偶次幂	-1 的奇次幂是 -1，-1 的偶次幂是 1

重点 4 实数的大小比较

1. 数轴比较法：在数轴上表示的两个数，右边的数总比左边的数大。

2. 代数比较法：正数大于 0，负数小于 0，正数大于一切负数，两个负数中绝对值大的反而小。

3. 作差比较法：设 a,b 是任意实数，若 $a-b>0$，则 $a>b$；若 $a-b=0$，则 $a=b$；若 $a-b<0$，则 $a<b$。

4. 作商比较法：设 a,b 为正数，若 $\frac{a}{b}>1$，则 $a>b$；若 $\frac{a}{b}=1$，则 $a=b$；若 $\frac{a}{b}<1$，则 $a<b$。

5. 平方比较法：若 $a>\sqrt{b}$，则 $a^2>b(b>0)$（主要应用于二次根式估值及含有二次根号的数的大小比较）。

易混淆点 平方根与算术平方根

名称		算术平方根	平方根
区别	个数	正数的算术平方根只有一个	正数的平方根有两个
区别	表示方法	正数 a 的算术平方根表示为 $\sqrt{a}$	正数 a 的平方根表示为 $\pm\sqrt{a}$
区别	取值范围	正数的算术平方根一定是正数	正数的平方根一正一负，且互为相反数

经典试题解析

知识点 1 实数及其分类

例 1 （2023 · 荆州中考）在实数 -1，$\sqrt{3}$，$\frac{1}{2}$，3.14 中，无理数是 （　　）

A. -1　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 3.14

思路分析 根据无理数的定义判断即可。

解答 -1，$\frac{1}{2}$，3.14 是有理数，$\sqrt{3}$ 是无理数。

故选 B。

知识点 2 数轴、相反数、倒数和绝对值

例 2 （2022 · 荆州中考）实数 a,b,c,d 在数轴上对应点的位置如图 2-1-1 所示，其中有一对互为相反数，它们是 （　　）

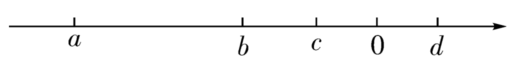


图 2-1-1

A. a 与 d　　B. b 与 d

C. c 与 d　　D. a 与 c

思路分析 理解相反数在数轴上的几何意义，即互为相反数的两个数在数轴上对应的点分布在原点的左右两侧，一正一负，且等距。

解答 c,d 对应的点位于原点两侧，且到原点的距离相等，所以 c,d 互为相反数。

故选 C。

例 3 $-|-2\ 023|$的倒数是 ( )

A. $-2\ 023$ B. $2\ 023$

C. $-\dfrac{1}{2\ 023}$ D. $\dfrac{1}{2\ 023}$

思路分析 根据绝对值和倒数的定义计算即可。

解答 $-|-2\ 023|=-2\ 023$，$-2\ 023$ 的倒数为 $-\dfrac{1}{2\ 023}$。

故选 C。

知识点 3 实数的大小比较

例 4 （2023·宁波中考）在 $-2,-1,0,\pi$ 这四个数中，最小的数是 ( )

A. -2 B. -1 C. 0 D. π

思路分析 实数的大小比较法则：①正数大于 0；②负数小于 0；③正数大于一切负数；④两个负数比较大小，绝对值大的反而小，据此解答即可。

解答 根据实数的大小比较法则，可得 $-2<-1<0<\pi$，

在这四个数中，最小的数是 -2。

故选 A。

知识点 4 科学记数法

例 5 （2023·温州中考）苏步青来自“数学家之乡”，为纪念其卓越贡献，国际上将一颗距地球约 218 000 000 km 的行星命名为“苏步青星”。数据 218 000 000 用科学记数法表示为 ( )

A. 0.218×10^9 B. 2.18×10^8

C. 21.8×10^2 D. 218×10^6

思路分析 科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 为整数。确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同。当原数绝对值大于或等于 10 时，n 是正整数，当原数绝对值小于 1 时，n 是负整数。

解答 $218\ 000\ 000=2.18\times10^8$。

故选 B。

知识点 5 平方根、算术平方根和立方根

例 6 （2023·邵阳中考）$\sqrt{64}$的立方根是________。

思路分析 根据算术平方根和立方根的定义计算。

解答 $\sqrt{64}=8$，8 的立方根是 2。

故答案为 2。

知识点 6 实数的运算

例 7 （2023·赤峰中考）计算：$(3.14-\pi)^0-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}+2\cos 60°-|1-\sqrt{3}|+\sqrt{12}$。

思路分析 根据零指数幂的定义、负整数指数幂的运算、特殊角的三角函数值、绝对值的性质以及二次根式的化简方法进行实数的加减法运算。

解 $(3.14-\pi)^0-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}+2\cos 60°-|1-\sqrt{3}|+\sqrt{12}=1-4+2\times\dfrac{1}{2}+1-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=1-4+1+1-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$。

陕西中考链接

1. (2023·陕西中考)计算:$3-5=$ (B)

A. 2　B. -2　C. 8　D. -8

2. (2022·陕西中考)-37 的相反数是 (B)

A. -37　B. 37　C. $-\frac{1}{37}$　D. $\frac{1}{37}$

3. (2021·陕西中考)计算:$3\times(-2)=$ (D)

A. 1　B. -1　C. 6　D. -6

4. (2020·陕西中考)2019 年,我国国内生产总值约为 990 870 亿元,将数字 990 870 用科学记数法表示为 (A)

A. 9.9087×10^{5}　B. 9.9087×10^{4}

C. 99.087×10^{4}　D. 99.087×10^{3}

5. (2020·陕西中考)图 2-1-2 是 A 市某一天的气温随时间变化的情况,则这天的日温差(最高气温与最低气温的差)是 (C)

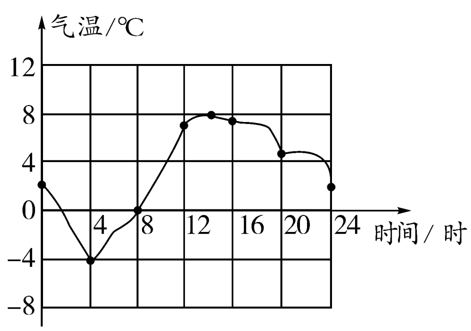


图 2-1-2

A. 4 ℃　B. 8 ℃

C. 12 ℃　D. 16 ℃

6. (2023·陕西中考)如图 2-1-3,在数轴上,点 A 表示$\sqrt{3}$,点 B 与点 A 位于原点的两侧,且与原点的距离相等,则点 B 表示的数是__$-\sqrt{3}$__。

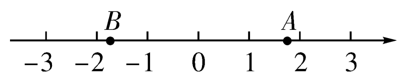


图 2-1-3

7. (2022·陕西中考)实数 a,b 在数轴上对应点的位置如图 2-1-4 所示,则 a __$<$__ $-b$。(填“>”“=”或“<”)

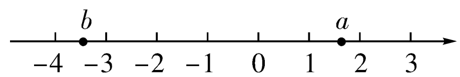


图 2-1-4

8. (2019·陕西中考)已知实数 $-\frac{1}{2}$,0.16,$\sqrt{3}$,π,$\sqrt{25}$,$\sqrt[3]{4}$,其中为无理数的是__$\sqrt{3},\pi,\sqrt[3]{4}$__。

9. (2023·陕西中考)计算:$\sqrt{5}\times(-\sqrt{10})-\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}+|-2^{3}|$。

解:原式 $=-\sqrt{50}-7+8=-5\sqrt{2}+1$。

10. (2022 · 陕西中考)计算：$5\times(-3)+|-\sqrt{6}|-\left(\frac{1}{7}\right)^{0}$。

解：原式 $=-15+\sqrt{6}-1=-16+\sqrt{6}$。

11. (2021 · 陕西中考)计算：$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+|1-\sqrt{2}|-\sqrt{8}$。

解：原式 $=1+\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}=-\sqrt{2}$。

核心素养培优

1. (2023 · 巴中中考)下列各数为无理数的是 (C)

A. 0.618　　B. $\frac{22}{7}$

C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt[3]{-27}$

2. (2022 · 泰安中考)$|-5|$的倒数是 (A)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{5}$

C. 5　　D. -5

3. (2023 · 自贡中考)如图 2-1-5，数轴上点 A 表示的数是 2 023，$OA=OB$，则点 B 表示的数是 (B)

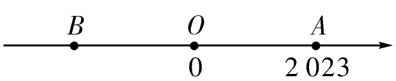


图 2-1-5

A. 2 023　　B. $-2\ 023$

C. $\frac{1}{2\ 023}$　　D. $-\frac{1}{2\ 023}$

4. (2023 · 福建中考)党的二十大报告指出，我国建成世界上规模最大的教育体系、社会保障体系、医疗卫生体系，教育普及水平实现历史性跨越，基本养老保险覆盖十亿四千万人，基本医疗保险参保率稳定在百分之九十五。将数据 1 040 000 000 用科学记数法表示为 (C)

A. 104×10^{7}　　B. 10.4×10^{8}

C. 1.04×10^{9}　　D. 0.104×10^{10}

5. (2023 · 菏泽中考)实数 a,b,c 在数轴上对应点的位置如图 2-1-6 所示，下列式子正确的是 (C)

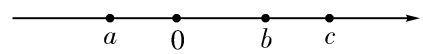


图 2-1-6

A. $c(b-a)<0$　　B. $b(c-a)<0$

C. $a(b-c)>0$　　D. $a(c+b)>0$

6. (2022 · 凉山州中考)化简：$\sqrt{(-2)^{2}}=$ (D)

A. ±2　　B. -2　　C. 4　　D. 2

7. (2023 · 巴中中考)在 $0,\left(-\frac{1}{3}\right)^{2},-\pi,-2$ 四个数中，最小的实数是 <u>$-\pi$</u>。

8. (2023 · 广安中考) $\sqrt{16}$的平方根是 <u>±2</u>。

9. (2023 · 荆州中考)若 $|a-1|+(b-$

$3)^2=0$，则 $\sqrt{a+b}=$ __2__。

10.（2023·郴州中考）计算：$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt{3}\tan 30°+(\pi-2\,023)^0+|-2|$。

解：原式 $=2-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+1+2=2-1+1+2=4$。

11.（2023·怀化中考）计算：$|-2|+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\sqrt{9}+(\sin 45°-1)^0-(-1)$。

解：原式 $=2+3-3+1+1=4$。

12.（2023·成都中考）计算：$\sqrt{4}+2\sin 45°-(\pi-3)^0+|\sqrt{2}-2|$。

解：原式 $=2+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1+2-\sqrt{2}=2+\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}=3$。

第 2 讲　整式及因式分解

重难点突破

重点 1　整式的运算

1. 整式的加减的实质是去括号后，合并同类项。

2. 幂的有关计算公式（m,n 为正整数）：(1)同底数幂的乘法：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；(2)同底数幂的除法：$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq0)$；(3)幂的乘方：$(a^m)^n=a^{mn}$；(4)积的乘方：$(ab)^n=a^nb^n$；(5)零次幂：$a^0=1(a\neq0)$；(6)负整数指数幂：$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$或$a^{-p}=\left(\frac{1}{a}\right)^p$（$a\neq0$，其中 p 为正整数）。

3. 整式的乘法运算：

(1)单项式乘单项式；(2)单项式乘多项式：$m(a+b+c)=ma+mb+mc$；(3)多项式乘多项式：$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb$；(4)平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；(5)完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$。

4. 整式的除法运算：

(1)单项式除以单项式；(2)多项式除以单项式。

重点 2　提公因式法分解因式

提取公因式的方法

(1)确定公因式

①定系数：当各项系数都是整数时，公因式的系数应取各项系数的最大公约数；②定字母：字母取各项相同的字母；③定指数：取相同字母的最低次数；④看整体：当多

项式的各项中含有相同的“多项式”，应取“多项式”的最低次幂[例如：$(a-b)^2x+(a-b)y$ 中有公因式 $(a-b)$]。

(2)提公因式：提出公因式并确定另一个因式(依据多项式除以单项式)。

温馨提示 如果多项式的第一项是负的，一般要先提出负号，使括号内的第一项的系数成为正数；提出负号时，多项式的各项都要变号。

重点3 运用公式法分解因式

如果把乘法公式反过来，就可以把某些多项式分解因式。

$$a^2-b^2 \underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{分解因式}}{\rightleftharpoons}} (a+b)(a-b);$$

$$a^2\pm 2ab+b^2 \underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{分解因式}}{\rightleftharpoons}} (a\pm b)^2。$$

温馨提示 公式中的字母 a,b 可以是单项式，也可以是多项式。

经典试题解析

知识点1 整式的运算

例1 (2023·眉山中考)下列运算中，正确的是 ( )

A. $3a^3-a^2=2a$ B. $(a+b)^2=a^2+b^2$

C. $a^3b^2\div a^2=a$ D. $(a^2b)^2=a^4b^2$

思路分析 根据整式的加减、完全平方公式、单项式除以单项式、积的乘方法则逐项判断即可。

解答 A. $3a^3-a^2$ 中，$3a^3$ 与 $-a^2$ 不是同类项，因此不能合并，原式计算错误；

B. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，原式计算错误；

C. $a^3b^2\div a^2=ab^2$，原式计算错误；

D. $(a^2b)^2=a^4b^2$，原式计算正确。

故选 D。

知识点2 分解因式

例2 (2023·白银中考)分解因式：$ax^2-2ax+a=$________。

思路分析 根据提公因式法和完全平方公式进行分解即可。

解答 $ax^2-2ax+a=a(x^2-2x+1)=a(x-1)^2$。

故答案为 $a(x-1)^2$。

知识点3 探究规律

例3 (2023·临沂中考)观察下列式子：

$1\times3+1=2^2$；

$2\times4+1=3^2$；

$3\times5+1=4^2$；

……

按照上述规律，________$=n^2$。

思路分析 根据已有的式子，抽象出相应的数字规律，进行作答即可。

解答 $\because 1\times3+1=2^2$；

$2\times4+1=3^2$；

$3\times5+1=4^2$；

……

$\therefore (n-1)(n+1)+1=n^2$。

故答案为 $(n-1)(n+1)+1$。

陕西中考链接

1. (2023 · 陕西中考)计算:$6xy^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^3y^3\right) =$ (B)

A. $3x^4y^5$　　B. $-3x^4y^5$

C. $3x^3y^6$　　D. $-3x^3y^6$

2. (2022 · 陕西中考)计算:$2x \cdot (-3x^2y^3) =$ (C)

A. $6x^3y^3$　　B. $-6x^2y^3$

C. $-6x^3y^3$　　D. $18x^3y^3$

3. (2021 · 陕西中考)计算:$(a^3b)^{-2} =$ (A)

A. $\frac{1}{a^6b^2}$　　B. a^6b^2

C. $\frac{1}{a^5b^2}$　　D. $-2a^3b$

4. (2020 · 陕西中考)计算:$\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^3 =$ (C)

A. $-2x^6y^3$　　B. $\frac{8}{27}x^6y^3$

C. $-\frac{8}{27}x^6y^3$　　D. $-\frac{8}{27}x^5y^4$

5. (2021 · 陕西中考)分解因式:$x^3+6x^2+9x=$ <u>$x(x+3)^2$</u>。

核心素养培优

1. (2023 · 吉林中考)下列各式运算结果为 a^5 的是 (B)

A. a^2+a^3　　B. $a^2 \cdot a^3$

C. $(a^2)^3$　　D. $a^{10} \div a^2$

2. (2023 · 深圳中考)下列运算正确的是 (D)

A. $a^3 \cdot a^2 = a^6$

B. $4ab - ab = 4$

C. $(a+1)^2 = a^2 + 1$

D. $(-a^3)^2 = a^6$

3. (2023 · 济宁中考)下列各式从左到右的变形,分解因式正确的是 (C)

A. $(a+3)^2 = a^2+6a+9$

B. $a^2-4a+4=a(a-4)+4$

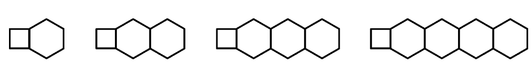
C. $5ax^2-5ay^2=5a(x+y)(x-y)$

D. $a^2-2a-8=(a-2)(a+4)$

4. (2023 · 常德中考)若 $a^2+3a-4=0$,则 $2a^2+6a-3=$ (A)

A. 5　　B. 1　　C. -1　　D. 0

5. (2023 · 重庆中考)用长度相同的木棍按如图 2-2-1 所示的规律拼图案,其中第①个图案用了 9 根木棍,第②个图案用了 14 根木棍,第③个图案用了 19 根木棍,第④个图案用了 24 根木棍,…,按此规律排列下去,则第⑧个图案用的木棍根数是 (B)



① ② ③ ④ …

图 2-2-1

A. 39　　B. 44　　C. 49　　D. 54

6. (2023 · 江西中考)单项式 $-5ab$ 的系数为 <u>-5</u>。

7. (2023 · 乐山中考)若 m,n 满足 $3m-$

$n-4=0$，则 $8^m \div 2^n =$ <u>16</u>。

8.（2023·赤峰中考）分解因式：$x^3-9x=$ <u>$x(x+3)(x-3)$</u>。

9.（2023·深圳中考）已知实数 a,b，满足 $a+b=6$，$ab=7$，则 a^2b+ab^2 的值为 <u>42</u>。

10.（2023·遂宁中考）烷烃是一类由碳、氢元素组成的有机化合物，在生产生活中可作为燃料、润滑剂等原料，也可用于动、植物的养护。通常用碳原子的个数命名为甲烷、乙烷、丙烷、…、癸烷（当碳原子数目超过 10 个时即用汉文数字表示，如十一烷、十二烷…）等，甲烷的化学式为 CH_4，乙烷的化学式为 C_2H_6，丙烷的化学式为 C_3H_8…，其分子结构模型如图 2-2-2 所示，按照此规律，十二烷的化学式为 <u>$C_{12}H_{26}$</u>。

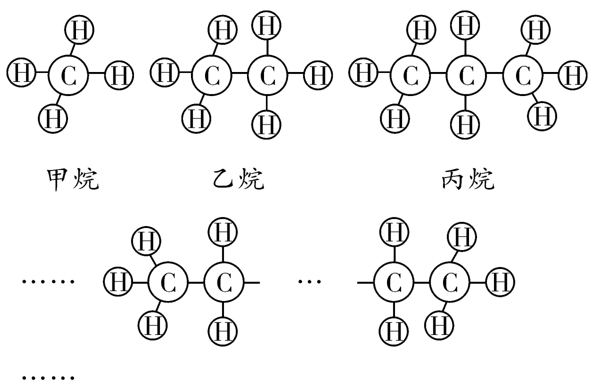


图 2-2-2

11.（2023·河南中考）化简：$(x-2y)^2-x(x-4y)$。

解：$(x-2y)^2-x(x-4y)=x^2-4xy+4y^2-x^2+4xy=4y^2$。

12.（2023·邵阳中考）先化简，再求值：$(a-3b)(a+3b)+(a-3b)^2$，其中 $a=-3$，$b=\frac{1}{3}$。

解：$(a-3b)(a+3b)+(a-3b)^2=a^2-9b^2+a^2-6ab+9b^2=2a^2-6ab$。

当 $a=-3$，$b=\frac{1}{3}$ 时，

原式 $=2\times(-3)^2-6\times(-3)\times\frac{1}{3}=2\times9+6=18+6=24$。

第 3 讲　分式

重难点突破

重点 1　分式的约分

1. 约分的关键是确定分式中分子和分母的公因式，确定公因式的方法：

（1）若分子、分母都是单项式，公因式的系数取分子、分母系数的最大公约数，公因式的字母取分子、分母相同字母的最低次

幂,它们的乘积就是公因式;

(2)若分子、分母中含有多项式,则先将多项式分解因式,再把系数的最大公约数和相同因式的最低次幂的乘积作为公因式。

2. 方法总结:由约分的概念可知,首先要将分子、分母分别转化为乘积的形式(分式的分子、分母是多项式的,先分解因式),再找出分子、分母的公因式并约去。

温馨提示 当分子和分母有一个含有负号时,一般把负号提到分式本身的前面。分式的约分一定要进行到底,约分后的结果是最简分式或整式。

重点2 分式的通分

通分的关键是确定几个分式的最简公分母,确定最简公分母的方法:

(1)若分子、分母都是单项式,最简公分母的系数取各分母系数的最小公倍数,字母取各分母相同字母的最高次幂,它们的乘积就是最简公分母;

(2)若分母中含有多项式,则先将多项式因式分解,再把系数的最小公倍数和相同因式的最高次幂的乘积作为最简公分母。

重点3 分式化简(求值)

1. 分式化简(求值)的步骤

(1)若分子、分母是多项式,先分解因式,然后通分或约分;

(2)有括号先计算括号里面的;

(3)进行乘除运算;

(4)进行加减运算;

(5)代入求值。

2. 注意事项

(1)化简求值题一定要做到先化简,再求值;

(2)通分时要记得给不含分母的项也乘最简公分母;

(3)化简结果应为最简分式或整式;

(4)求值时必须保证所“代”数值使原分式的分母及运算过程中分式的分母都不为0。

经典试题解析

知识点1 分式的混合运算

例 1 (2023·绥化中考)化简:$\left(\dfrac{x+2}{x^2-2x}-\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\dfrac{x-4}{x^2-2x}=$______。

思路分析 根据分式混合运算的顺序计算即可。

解答 $\left(\dfrac{x+2}{x^2-2x}-\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\dfrac{x-4}{x^2-2x}$

$=\left[\dfrac{x+2}{x(x-2)}-\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right]\div\dfrac{x-4}{x(x-2)}$

$=\left[\dfrac{x^2-4}{x(x-2)^2}-\dfrac{x^2-x}{x(x-2)^2}\right]\div\dfrac{x-4}{x(x-2)}$

$=\dfrac{x-4}{x(x-2)^2}\cdot\dfrac{x(x-2)}{x-4}$

$=\dfrac{1}{x-2}$。

故答案为$\dfrac{1}{x-2}$。

知识点2 分式的化简求值

例 2 (2023·滨州中考)先化简,再求值:$\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)\div\dfrac{x^2-4}{x-1}$,再从$-2,-1,1,2$中选择一个合适的数作为$x$的值代入求值。

思路分析 先根据分式混合运算法则

进行计算，然后再根据分式的意义代入适当的数据求值即可。

解 $\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x^2-4}{x-1}=\left(\frac{x-1}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{(x+2)(x-2)}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{(x-1)}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x+2}$。

$\because x\neq1,\pm2$，

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，原式 $=\frac{1}{-1+2}=1$。

陕西中考链接

1.（2023·陕西中考）化简：$\left(\frac{3a}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}\right)\div\frac{2a-1}{a+1}$。

解：原式 $=\left[\frac{3a}{(a+1)(a-1)}-\frac{a+1}{(a+1)(a-1)}\right]\div\frac{2a-1}{a+1}$

$=\frac{2a-1}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a+1}{2a-1}=\frac{1}{a-1}$。

2.（2022·陕西中考）化简：$\left(\frac{a+1}{a-1}+1\right)\div\frac{2a}{a^2-1}$。

解：原式 $=\frac{a+1+a-1}{a-1}\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{2a}$

$=a+1$。

核心素养培优

1.（2022·怀化中考）代数式 $\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{\pi}$，$\frac{2}{x^2+4}$，$x^2-\frac{2}{3}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{x+1}{x+2}$ 中，属于分式的有（ B ）

A. 2 个　　B. 3 个

C. 4 个　　D. 5 个

2.（2023·广西中考）若分式 $\frac{1}{x+1}$ 有意义，则 x 的取值范围是（ A ）

A. $x\neq-1$　　B. $x\neq0$

C. $x\neq1$　　D. $x\neq2$

3.（2023·凉山州中考）若分式 $\frac{x^2-x}{x-1}$ 的值为 0，则 x 的值是（ A ）

A. 0　　B. -1

C. 1　　D. 0 或 1

4.（2023·赤峰中考）化简 $\frac{4}{x+2}+x-2$ 的结果是（ D ）

A. 1　　B. $\frac{x^2}{x^2-4}$

C. $\frac{x}{x+2}$　　D. $\frac{x^2}{x+2}$

5.（2023·武汉中考）已知 $x^2-x-1=0$，计算 $\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\div\frac{x^2-x}{x^2+2x+1}$ 的值是（ A ）

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

6.（2023·宁波中考）要使分式 $\frac{3}{x-2}$ 有

意义，x 的取值应满足 $\underline{\quad x\neq 2\quad}$。

7.（2023·衡阳中考）已知 $x=5$，则代数式 $\frac{3}{x-4}-\frac{24}{x^2-16}$ 的值为 $\underline{\quad \frac{1}{3}\quad}$。

8.（2023·上海中考）化简：$\frac{2}{1-x}-\frac{2x}{1-x}$ 的结果为 $\underline{\quad 2\quad}$。

9.（2023·大连中考）计算：$\left(\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a^2-9}\right)\div\frac{a-2}{2a+6}=\underline{\quad \frac{2}{a-3}\quad}$。

10.（2023·白银中考）化简：$\frac{a+2b}{a+b}-\frac{a-b}{a-2b}\div\frac{a^2-b^2}{a^2-4ab+4b^2}$。

解：原式 $=\frac{a+2b}{a+b}-\frac{a-b}{a-2b}\cdot\frac{(a-2b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+2b}{a+b}-\frac{a-2b}{a+b}=\frac{4b}{a+b}$。

11.（2023·深圳中考）先化简，再求值：$\left(\frac{1}{x-1}+1\right)\div\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$，其中 $x=3$。

解：$\left(\frac{1}{x-1}+1\right)\div\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x+1}$。

当 $x=3$ 时，原式 $=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$。

12.（2023·怀化中考）先化简 $\left(1+\frac{3}{a-1}\right)\div\frac{a^2-4}{a-1}$，再从 $-1,0,1,2$ 中选择一个适当的数作为 a 的值代入求值。

解：$\left(1+\frac{3}{a-1}\right)\div\frac{a^2-4}{a-1}=\left(\frac{a-1}{a-1}+\frac{3}{a-1}\right)\div\frac{(a+2)(a-2)}{a-1}=\frac{a+2}{a-1}\cdot\frac{a-1}{(a+2)(a-2)}=\frac{1}{a-2}$。

当 a 取 1，2 时，分式没有意义，

所以 $a=-1$ 或 0，

当 $a=-1$ 时，原式 $=\frac{1}{-1-2}=-\frac{1}{3}$；

当 $a=0$ 时，原式 $=\frac{1}{0-2}=-\frac{1}{2}$。

第 4 讲　二次根式

重难点突破

重点 1　二次根式有意义的条件

二次根式 $\sqrt{a}$ 有意义的条件：被开方数为非负数，即 $a\geqslant 0$。

重点 2　二次根式的化简

1. 化去根号下的分母。若被开方数中含有带分数，应先将带分数化成假分数；若被开方数中含有小数，应先将小数化成分数。

2. 将被开方数中能开得尽方的因数或因式进行开方。

3. 被开方数是多项式且能进行因式分

解的要先进行因式分解。

4. 分母中若有根号，则需进行分母有理化。

重点3　分母有理化

分母有理化就是把分母中的根号化去。常见的分母有理化的形式有以下两种：(1)分母中含有一个二次根式的形式，利用$(\sqrt{a})^2=a$进行化简，如$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$($a>0,b\geqslant0$)；(2)分母中含有两个二次根式的和或差的形式，利用平方差公式进行化简，如$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$($a>0,b>0,a\neq b$)。

重点4　常见的非负数

常见的非负数有$\sqrt{a}(a\geqslant0)$，$|a|$，a^2。

若几个非负数的和为0，则这几个非负数均为0。如：若$\sqrt{a}+|b|+c^2=0$，则$a=b=c=0$。

重点5　二次根式的运算

运算顺序：先乘方，再乘除，后加减，有括号的先算括号里面的。

注意事项：(1)加减时要先将二次根式化为最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式合并；(2)运算的结果一定要化为最简二次根式。

易混淆点　二次根式的两个性质

性质1：$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$；

性质2：$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant0),\\-a(a<0)。\end{cases}$

区别：(1)运算顺序不同：$(\sqrt{a})^2$先开方再平方，$\sqrt{a^2}$先平方再开方；(2)取值范围不同：$(\sqrt{a})^2$中a为非负数时有意义，$\sqrt{a^2}$中a为任意实数都有意义；(3)结果不同：$\sqrt{a^2}$的结果要根据a的取值情况进行分类讨论。

经典试题解析

知识点1　二次根式有意义的条件

例1　(2023·江西中考)若$\sqrt{a-4}$有意义，则a的值可以是　(　　)

A. -1　B. 0　C. 2　D. 6

思路分析　根据二次根式有意义的条件：被开方数为非负数，即被开方数大于或等于0，即可得到答案。

解答　$\because\sqrt{a-4}$有意义，$\therefore a-4\geqslant0$，解得$a\geqslant4$，则a的值可以是6。

故选D。

知识点2　最简二次根式

例2　化简$\sqrt{135}$的结果是　(　　)

A. $3\sqrt{5}$　B. $27\sqrt{5}$

C. $3\sqrt{15}$　D. $9\sqrt{15}$

思路分析　根据最简二次根式的条件：①被开方数不含分式；②被开方数中不含能开得尽方的因数或因式，再由$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$($a\geqslant0,b\geqslant0$)化简。

解答　$\sqrt{135}=\sqrt{9\times15}=\sqrt{9}\times\sqrt{15}=3\sqrt{15}$。故选C。

知识点3　二次根式的非负性

例3　(2023·菏泽中考)$\triangle ABC$的三边长a,b,c满足$(a-b)^2+\sqrt{2a-b-3}+|c-3\sqrt{2}|=0$，则$\triangle ABC$是　(　　)

A. 等腰三角形　B. 直角三角形

C. 锐角三角形　D. 等腰直角三角形

思路分析 根据偶次幂、二次根式与绝对值的非负性，可分别得到关于 a,b,c 的等式，从而分别计算得到 a,b,c 的值，再由 $a^2+b^2=c^2$ 的关系，可得到 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形。

解答 $\because (a-b)^2+\sqrt{2a-b-3}+|c-3\sqrt{2}|=0$，

又$\because (a-b)^2\geqslant 0$，$\sqrt{2a-b-3}\geqslant 0$，$|c-3\sqrt{2}|\geqslant 0$，

$\therefore \begin{cases} a-b=0, \\ 2a-b-3=0, \\ c-3\sqrt{2}=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3, \\ b=3, \\ c=3\sqrt{2}. \end{cases}$

$\therefore a^2+b^2=c^2$ 且 $a=b$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形。

故选 D。

知识点 4 二次根式的性质与化简

例 4 （2022·遂宁中考）实数 a,b 在数轴上的位置如图 2-4-1 所示，化简 $|a+1|-\sqrt{(b-1)^2}+\sqrt{(a-b)^2}=$ ________。

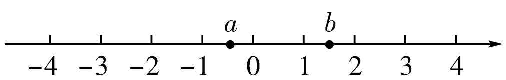


图 2-4-1

思路分析 依据二次根式 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a(a\geqslant 0), \\ -a(a<0) \end{cases}$ 化简即可。

解答 由图知，$a+1>0$，$b-1>0$，$a-b<0$，

$\therefore$ 原式 $=(a+1)-(b-1)+|a-b|$

$=a+1-(b-1)+(b-a)$

$=a+1-b+1+b-a$

$=2$。

故答案为 2。

知识点 5 二次根式的运算

例 5 （2023·大连中考）下列计算正确的是（　　）

A. $(\sqrt{2})^0=\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{6}$

C. $\sqrt{8}=4\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}(2\sqrt{3}-2)=6-2\sqrt{3}$

思路分析 根据零指数幂、二次根式的加法、二次根式的性质以及二次根式的混合运算法则逐一判断。

解答 A. 非零数的零次幂等于 1，所以 $(\sqrt{2})^0=1$，故该选项错误；B. $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$，故该选项错误；C. 根据二次根式的性质 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0, b\geqslant 0)$，可得 $\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，故此选项错误；D. $\sqrt{3}(2\sqrt{3}-2)=\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}-\sqrt{3}\times 2=6-2\sqrt{3}$，故此选项正确。故选 D。

知识点 6 二次根式的估算

例 6 （2023·临沂中考）设 $m=5\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{45}$，则实数 m 所在的范围是（　　）

A. $m<-5$　　B. $-5<m<-4$

C. $-4<m<-3$　　D. $m>-3$

思路分析 将原式进行化简后，再利用夹逼法判断其在哪两个连续整数之间即可。

解答 $m=5\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{45}=\sqrt{25\times\frac{1}{5}}-\sqrt{9}\times\sqrt{5}=\sqrt{5}-3\sqrt{5}=-2\sqrt{5}=-\sqrt{20}$。

$\because 16<20<25$，

$\therefore \sqrt{16}<\sqrt{20}<\sqrt{25}$，即 $4<\sqrt{20}<5$，

$\therefore -5<-\sqrt{20}<-4$，

$\therefore -5<m<-4$。

故选 B。

陕西中考链接

1.（2022·陕西中考）计算：$3-\sqrt{25}=$ <u>-2</u>。

2.（2020·陕西中考）计算：$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=$ <u>1</u>。

核心素养培优

1.（2023·烟台中考）下列二次根式中，与$\sqrt{2}$是同类二次根式的是　（ C ）

A. $\sqrt{4}$　　B. $\sqrt{6}$

C. $\sqrt{8}$　　D. $\sqrt{12}$

2.（2023·金华中考）要使$\sqrt{x-2}$有意义，则x的值可以是　（ D ）

A. 0　　B. -1

C. -2　　D. 2

3.（2023·衡阳中考）对于二次根式的乘法运算，一般地，有$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$。该运算法则成立的条件是　（ D ）

A. $a>0,b>0$　　B. $a<0,b<0$

C. $a\leqslant 0,b\leqslant 0$　　D. $a\geqslant 0,b\geqslant 0$

4.（2023·上海中考）下列运算正确的是　（ A ）

A. $a^5\div a^2=a^3$　　B. $a^3+a^3=a^6$

C. $(a^3)^2=a^5$　　D. $\sqrt{a^2}=a$

5.（2023·河北中考）若$a=\sqrt{2},b=\sqrt{7}$，则$\sqrt{\frac{14a^2}{b^2}}=$　（ A ）

A. 2　　B. 4

C. $\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{2}$

6.（2023·绥化中考）若式子$\frac{\sqrt{x+5}}{x}$有意义，则x的取值范围是 <u>$x\geqslant -5$且$x\neq 0$</u>。

7.（2022·牡丹江中考）若两个连续的整数a,b满足$a<\sqrt{13}<b$，则$\frac{1}{ab}$的值为 <u>$\frac{1}{12}$</u>。

8.（2023·自贡中考）请写出一个比$\sqrt{23}$小的整数：<u>4（答案不唯一）</u>。

9.（2023·凉山州中考）计算：$(\pi-3.14)^0+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=$ <u>$\sqrt{2}$</u>。

10.（2022·眉山中考）将一组数$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{6}$，$2\sqrt{2}$，…，$4\sqrt{2}$，按下列方式进行排列：

$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{6}$，$2\sqrt{2}$；

$\sqrt{10}$，$2\sqrt{3}$，$\sqrt{14}$，4；

…

若2的位置记为(1,2)，$\sqrt{14}$的位置记为(2,3)，则$2\sqrt{7}$的位置记为 <u>(4,2)</u>。

11.（2023·上海中考）计算：$\sqrt[3]{8}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+|\sqrt{5}-3|$。

解：原式$=2+\frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}-9+3-\sqrt{5}$

$=2+\sqrt{5}-2-9+3-\sqrt{5}$

$=-6$。

12.（2023·甘肃中考）计算：$\sqrt{27}\div\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{2}-6\sqrt{2}$。

解：原式 $=3\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times2\sqrt{2}-6\sqrt{2}$

$=12\sqrt{2}-6\sqrt{2}=6\sqrt{2}$。

第5讲 一次方程(组)

重难点突破

重点1 解一元一次方程

解一元一次方程的一般步骤是去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为1。

依据方程的特点要灵活运用，逐步将方程化为“$x=a$”的形式。若方程中有分母，一般需先去分母；既有分母也有括号时，根据方程的特点，先去括号能使方程简化，也可先去括号。

温馨提示 去分母时，不要漏乘不含分母的项，若分子是多项式，去分母后要加括号。

重点2 选取适当的方法解二元一次方程组

代入消元法：当方程组中某个方程中的未知数的系数是1或-1，适合用此方法。

加减消元法：当方程组中两个方程同一未知数的系数的绝对值相等或成整数倍关系时，适合用此方法。

此外根据方程组的特点，有时利用换元法或整体代入法等方法也较容易求出方程组的解。

重点3 二元一次方程组解的应用

二元一次方程组中含参问题的解题方法：若已知方程组的解，即可将方程组的解代入原方程组中求出参数的值；若已知方程组的解满足一个等式，则将原方程组的解用含参数的式子表示出来，代入等式即可求出参数的值。

重点4 一次方程(组)在实际应用中的常见类型与数量关系

购买问题	总费用 = 单价 × 数量
打折、销售问题	利润 = 售价 − 成本价； 售价 = 标价 × 折扣(比如打八折，即“标价 ×0.8”)； 利润率 = $\frac{利润}{进价}\times100\%$； 销售额 = 销售单价 × 销量
工程问题	工作总量 = 工作效率 × 工作时间
行程问题	路程 = 速度 × 时间； 相遇问题：全路程 = 甲走的路程 + 乙走的路程； 追及问题：(1)同地不同时出发：前者走的路程 = 追者走的路程；(2)同时不同地出发：前者走的路程 + 两地间距离 = 追者走的路程
等积变形问题	变化前体积(周长或面积) = 变化后体积(周长或面积)

经典试题解析

知识点1　解一元一次方程

例1　解方程：$\frac{x-3}{2}+\frac{x-1}{3}=4$。

思路分析　根据解一元一次方程的一般步骤进行解答。

解　去分母，得 $3(x-3)+2(x-1)=24$，

去括号，得 $3x-9+2x-2=24$，

移项，得 $3x+2x=24+9+2$，

合并同类项，得 $5x=35$，

系数化为1，得 $x=7$。

知识点2　解二元一次方程组

例2　(2023·常德中考)解方程组：$\begin{cases}x-2y=1①,\\3x+4y=23②。\end{cases}$

思路分析　利用加减消元法或代入消元法求解即可。

解　方法一：将①×2得，$2x-4y=2$③，

②+③得，$5x=25$，

解得 $x=5$。

将 $x=5$ 代入①得，$y=2$，

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=5,\\y=2。\end{cases}$

方法二：由①得，$x=1+2y$③，

把③代入②得，$3(1+2y)+4y=23$，

解得 $y=2$。

将 $y=2$ 代入③得，$x=5$，

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=5,\\y=2。\end{cases}$

例3　(2023·眉山中考)已知关于 x，y 的二元一次方程组$\begin{cases}3x-y=4m+1,\\x+y=2m-5\end{cases}$的解满足 $x-y=4$，则 m 的值为　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

思路分析　将方程组的两个方程相加或相减，解方程即可解答。

解答　方法一：$\begin{cases}3x-y=4m+1①,\\x+y=2m-5②,\end{cases}$

①+②得，$4x=6m-4$。

$\therefore x=\frac{3m-2}{2}$，

代入②，可得 $y=\frac{m-8}{2}$。

代入 $x-y=4$ 得，$\frac{3m-2}{2}-\frac{m-8}{2}=4$，解得 $m=1$。

方法二：(①-②)×$\frac{1}{2}$得，$x-y=m+3$，

又 $x-y=4$，$\therefore m=1$。

故选B。

知识点3　一次方程(组)的实际应用

例4　(2023·成都中考改编)2023年7月28日至8月8日，第31届世界大学生运动会在成都举行。为“当好东道主，热情迎嘉宾”，成都某知名小吃店计划购买A，B两种食材制作小吃。已知购买1 kg A种食材和1 kg B种食材共需68元，购买5 kg A种食材和3 kg B种食材共需280元。求A，B两种食材的单价。

思路分析　设A种食材的单价为 a 元，

B 种食材的单价为 b 元，列二元一次方程组求解。

解 设 A 种食材的单价为 a 元，B 种食材的单价为 b 元，根据题意得，

$\begin{cases} a+b=68, \\ 5a+3b=280, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=38, \\ b=30。 \end{cases}$

答：A 种食材的单价为 38 元，B 种食材的单价为 30 元。

陕西中考链接

1.（2021 · 陕西中考）幻方，最早源于我国，古人称之为纵横图。如图 2-5-1 所示的幻方中，各行、各列及各条对角线上的三个数字之和均相等，则图中 a 的值为 $\underline{\quad -2 \quad}$。

-1	-6	1
0	a	-4
-5	2	-3

图 2-5-1

2.（2023 · 陕西中考）小红在一家文具店买了一种大笔记本 4 个和一种小笔记本 6 个，共用了 62 元。已知她买的这种大笔记本的单价比这种小笔记本的单价多 3 元，求该文具店中这种大笔记本的单价。

解：设该文具店中这种大笔记本的单价为 x 元，根据题意，得

$4x+6(x-3)=62$，解得 $x=8$。

答：该文具店中这种大笔记本的单价为 8 元。

3.（2021 · 陕西中考）一家商店在销售某种服装（每件的标价相同）时，按这种服装每件标价的八折销售 10 件的销售额，与按这种服装每件的标价降低 30 元销售 11 件的销售额相等。求这种服装每件的标价。

解：设这种服装每件的标价是 x 元，由题意，得

$80\%x\times10=11(x-30)$，解得 $x=110$。

答：这种服装每件的标价是 110 元。

核心素养培优

1.（2022 · 青海中考）下列说法中，正确的是（ C ）

A. 若 $ac=bc$，则 $a=b$

B. 若 $a^2=b^2$，则 $a=b$

C. 若 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$，则 $a=b$

D. 若 $-\frac{1}{3}x=6$，则 $x=2$

2.（2023 · 荆州中考）我国古代数学名著《孙子算经》中记载：“今有木，不知长短，引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺，木长几何？”意思是：用一根绳子去量一根木条，绳子还剩余 4.5 尺；将绳子对折再量

木条,木条剩余 1 尺,问木条长多少尺?如果设木条长 x 尺,绳子长 y 尺,那么可列方程组为 (A)

A. $\begin{cases}y=x+4.5,\\0.5y=x-1\end{cases}$ B. $\begin{cases}y=x+4.5,\\y=2x-1\end{cases}$

C. $\begin{cases}y=x-4.5,\\0.5y=x+1\end{cases}$ D. $\begin{cases}y=x-4.5,\\y=2x-1\end{cases}$

3. (2023·连云港中考)元朝朱世杰所著的《算学启蒙》中,记载了这样一道题:良马日行二百四十里,驽马日行一百五十里,驽马先行一十二日,问良马几何日追及之?其大意是:快马每天行 240 里,慢马每天行 150 里,慢马先行 12 天,快马几天可追上慢马?若设快马 x 天可追上慢马,由题意得 (D)

A. $\frac{x}{240}=\frac{x+12}{150}$

B. $\frac{x}{240}=\frac{x}{150}-12$

C. $240(x-12)=150x$

D. $240x=150(x+12)$

4. (2023·齐齐哈尔中考)为提高学生学习兴趣,增强动手实践能力,某校为物理兴趣小组的同学购买了一根长度为 150 cm 的导线,将其全部截成 10 cm 和 20 cm 两种长度的导线用于实验操作(每种长度的导线至少一根),则截取方案共有 (C)

A. 5 种 B. 6 种

C. 7 种 D. 8 种

5. (2023·南充中考)关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}3x+y=2m-1,\\x-y=n\end{cases}$ 的解满足 $x+y=1$,则 $4^m\div2^n$ 的值是 (D)

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

6. (2023·通辽中考)点 Q 的横坐标为一元一次方程 $3x+7=32-2x$ 的解,纵坐标为 $a+b$ 的值,其中 a,b 满足二元一次方程组 $\begin{cases}2a-b=4,\\-a+2b=-8,\end{cases}$ 则点 Q 关于 y 轴对称点 Q' 的坐标为__$(-5,-4)$__。

7. (2022·北部湾中考)阅读材料:整体代值是数学中常用的方法。例如"已知 $3a-b=2$,求代数式 $6a-2b-1$ 的值。"可以这样解:$6a-2b-1=2(3a-b)-1=2\times2-1=3$。根据材料,解决问题:若 $x=2$ 是关于 x 的一元一次方程 $ax+b=3$ 的解,则代数式 $4a^2+4ab+b^2+4a+2b-1$ 的值是__14__。

8. 解方程:$x-\frac{x-2}{2}=1+\frac{2x-1}{3}$。

解:去分母,得 $6x-3(x-2)=6+2(2x-1)$,

去括号,得 $6x-3x+6=6+4x-2$,

移项,得 $6x-3x-4x=6-2-6$,

合并同类项,得 $-x=-2$,

系数化为 1,得 $x=2$。

9. (2023·南通中考)解方程组:$\begin{cases}2x+y=3,\\3x+y=5。\end{cases}$

解:已知 $\begin{cases}2x+y=3①,\\3x+y=5②,\end{cases}$

用②-①,得 $x=2$,

将 $x=2$ 代入①,得 $y=-1$,

∴ 原方程组的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=-1。\end{cases}$

10. (2023·云南中考)蓝天白云下,青山绿水间,支一顶帐篷,邀亲朋好友,听蝉鸣,闻清风,话家常,好不惬意。某景区为响应文化和旅游部《关于推动露营旅游休闲健康有序发展的指导意见》精神,需要购买 A,

B 两种型号的帐篷。若购买 A 种型号帐篷 2 顶和 B 种型号帐篷 4 顶,则需 5 200 元;若购买 A 种型号帐篷 3 顶和 B 种型号帐篷 1 顶,则需 2 800 元。

(1)求每顶 A 种型号帐篷和每顶 B 种型号帐篷的价格;

(2)若该景区需要购买 A,B 两种型号的帐篷共 20 顶(两种型号的帐篷均需购买),购买 A 种型号帐篷数量不超过购买 B 种型号帐篷数量的$\frac{1}{3}$,为使购买帐篷的总费用最低,应购买 A 种型号帐篷和 B 种型号帐篷各多少顶?购买帐篷的总费用最低为多少元?

解:(1)设每顶 A 种型号帐篷 m 元,每顶 B 种型号帐篷 n 元,根据题意得 $\begin{cases}2m+4n=5\ 200,\\3m+n=2\ 800,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=600,\\n=1\ 000。\end{cases}$

∴ 每顶 A 种型号帐篷 600 元,每顶 B 种型号帐篷 1 000 元。

(2)设购买 A 种型号帐篷 x 顶,总费用为 w 元,则购买 B 种型号帐篷$(20-x)$顶。

∵ 购买 A 种型号帐篷数量不超过购买 B 种型号帐篷数量的$\frac{1}{3}$,

$\therefore x\leqslant\frac{1}{3}(20-x)$,

解得 $x\leqslant5$。根据题意得 $w=600x+1\ 000(20-x)=-400x+20\ 000$。

$\because -400<0$,

∴ w 随 x 的增大而减小。

∴ 当 $x=5$ 时,w 取最小值,最小值为 $-400\times5+20\ 000=18\ 000$,

$\therefore 20-x=20-5=15$。

答:购买 A 种型号帐篷 5 顶,购买 B 种型号帐篷 15 顶,总费用最低,最低总费用为 18 000 元。

11. (2023 · 重庆中考)某粮食生产基地为了落实在适宜地区开展双季稻中间季节再种一季油菜的号召,积极扩大粮食生产规模,计划用基地的甲、乙两区农田进行油菜试种。甲区的农田比乙区的农田多 10 000 亩,甲区农田的 80% 和乙区全部农田均适宜试种,且两区适宜试种农田的面积刚好相同。(1 亩≈666.67 m^2)

(1)求甲、乙两区各有农田多少亩;

(2)在甲、乙两区适宜试种的农田全部种上油菜后,为加强油菜的虫害治理,基地派出一批性能相同的无人机,对试种农田喷洒除虫药,由于两区地势差别,派往乙区的无人机架次是甲区的 1.2 倍(每架次无人机喷洒时间相同),喷洒任务完成后,发现派往甲区的每架次无人机比乙区的平均多喷洒$\frac{50}{3}$亩,求派往甲区每架次无人机平均喷洒多少亩。

解:(1)设甲区有农田 x 亩,则乙区有农田$(x-10\ 000)$亩,

由题意得 $80\%x=x-10\ 000$,解得 $x=50\ 000$,则 $x-10\ 000=50\ 000-10\ 000=40\ 000$。

答:甲区有农田 50 000 亩,乙区有农田 40 000 亩。

(2)设派往甲区每架次无人机平均喷洒 y 亩,派往甲区的无人机架次为 a 架次,则派往乙区每架次无人机平均喷洒$\left(y-\frac{50}{3}\right)$亩,派往乙区的无人机架次为 $1.2a$ 架次,

由题意得 $ay=1.2a\left(y-\frac{50}{3}\right)$,即 $y=1.2\left(y-\frac{50}{3}\right)$,解得 $y=100$。

答:派往甲区每架次无人机平均喷洒 100 亩。

第 6 讲　分式方程

重难点突破

重点 1　分式方程及其解法

解分式方程的一般思路：将分式方程转化为整式方程（解分式方程的基本思想），具体做法用框图表示如下：

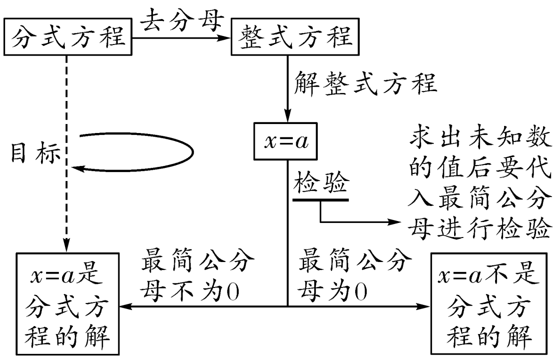


图 2-6-1

温馨提示　(1)分式方程的增根与无解并非同一个概念，分式方程无解，可能是解为增根，也可能是去分母后的整式方程无解；分式方程的增根不仅是去分母后的整式方程的根，也是使分式方程的分母为 0 的根；

(2)去分母时要注意：①若分母与最简公分母互为相反数，去分母时要变号；②要给常数项或整式乘最简公分母。

重点 2　分式方程的实际应用

1. 列分式方程解决实际问题的一般步骤：

实际问题 $\xrightarrow[\text{设未知数}]{\text{找等量关系}}$ 列分式方程 ⟶ 解分式方程 ⟶ 双检验 ⟶ 答

双检验：(1)检验是否是分式方程的解；(2)检验是否符合实际问题。

2. 常见问题的等量关系

(1)行程问题：$\dfrac{\text{路程}}{\text{速度}}=$时间；

(2)工程问题：$\dfrac{\text{工作总量}}{\text{工作效率}}=$工作时间；

（特别地，有时工作总量可以看作整体“1”，这时，工作时间×工作效率＝1）

(3)购买问题：$\dfrac{\text{总费用}}{\text{单价}}=$购买数量。

经典试题解析

知识点 1　解分式方程

例 1　（2023·山西中考）解分式方程：$\dfrac{1}{x-1}+1=\dfrac{3}{2x-2}$。

思路分析　找出分式方程的最简公分母，方程左右两边同时乘最简公分母，将分式方程转化为整式方程，求出整式方程的解，代入最简公分母中进行检验，即可得到原分式方程的解。

解　方程左右两边同乘 $2(x-1)$，得 $2+2(x-1)=3$，

解得 $x=\dfrac{3}{2}$。

检验：当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，$2(x-1)\neq0$，

∴ 原分式方程的解为 $x=\frac{3}{2}$ 。

温馨提示 注意解分式方程一定要验根。

知识点 2 分式方程解为特殊解

例 2 (2023·聊城中考)若关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-1}+1=\frac{m}{1-x}$ 的解为非负数，则 m 的取值范围是 ( )

A. $m\leqslant 1$ 且 $m\neq -1$

B. $m\geqslant -1$ 且 $m\neq 1$

C. $m<1$ 且 $m\neq -1$

D. $m>-1$ 且 $m\neq 1$

思路分析 首先先解含参的分式方程，然后结合已知条件及分式有意义的条件列出不等式计算即可。

解答 已知 $\frac{x}{x-1}+1=\frac{m}{1-x}$，

两边同乘 $(x-1)$，得 $x+x-1=-m$，

移项、合并同类项，得 $2x=1-m$，

系数化为 1，得 $x=\frac{1-m}{2}$。

∵ 原分式方程的解为非负数，

∴ $\frac{1-m}{2}\geqslant 0$ 且 $\frac{1-m}{2}\neq 1$，

解得 $m\leqslant 1$ 且 $m\neq -1$。

故选 A。

知识点 3 分式方程的实际应用

例 3 (2023·乐山中考)为了践行习近平总书记提出的“绿水青山就是金山银山”的发展理念，某地计划在规定时间内种植梨树 6 000 棵。开始种植时，由于志愿者的加入，实际每天种植梨树的数量比原计划增加了 20%，结果提前 2 天完成任务。求原计划每天种植梨树多少棵。

思路分析 设原计划每天种植梨树 x 棵，则实际每天种植梨树 $(1+20\%)x$ 棵，利用“工作时间 = 工作总量 ÷ 工作效率”结合实际比原计划提前 2 天完成任务列分式方程求解即可。

解 设原计划每天种植梨树 x 棵，则实际每天种植梨树 $(1+20\%)x$ 棵，

根据题意，得 $\frac{6\ 000}{x}-\frac{6\ 000}{(1+20\%)x}=2$，

解得 $x=500$，

经检验，$x=500$ 是原分式方程的解，且符合题意。

答：原计划每天种植梨树 500 棵。

陕西中考链接

1. (2021·陕西中考)解分式方程：$\frac{x-1}{x+1}-\frac{3}{x^2-1}=1$。

解：方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$，得 $(x-1)^2-3=(x+1)(x-1)$，

去括号，得 $x^2-2x+1-3=x^2-1$，

移项，得 $x^2-2x-x^2=-1-1+3$，

合并同类项，得 $-2x=1$，

系数化为 1，得 $x=-\frac{1}{2}$。

检验：当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$(x+1)(x-1)\neq 0$，

所以分式方程的解为 $x=-\frac{1}{2}$。

2.（2020·陕西中考）解分式方程：$\frac{x-2}{x}-\frac{3}{x-2}=1$。

解：去分母，得 $(x-2)^2-3x=x(x-2)$，

去括号，得 $x^2-4x+4-3x=x^2-2x$，

移项、合并同类项，得 $-5x=-4$，

系数化为 1，得 $x=\frac{4}{5}$，

检验：当 $x=\frac{4}{5}$ 时，$x(x-2)\neq0$，

所以分式方程的解为 $x=\frac{4}{5}$。

核心素养培优

1. 下列方程中，是分式方程的是　　（ B ）

A. $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}=1$　　B. $x+\frac{1}{x}=3$

C. $2x-1=x$　　D. $x-3y=1$

2.（2023·大连中考）将方程 $\frac{1}{x-1}+3=\frac{3x}{1-x}$ 去分母，两边同乘 $(x-1)$ 后的式子为　　（ B ）

A. $1+3=3x(1-x)$

B. $1+3(x-1)=-3x$

C. $x-1+3=-3x$

D. $1+3(x-1)=3x$

3.（2023·宜宾中考）分式方程 $\frac{x-2}{x-3}=\frac{2}{x-3}$ 的解为　　（ C ）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4.（2023·齐齐哈尔中考）如果关于 x 的分式方程 $\frac{2x-m}{x+1}=1$ 的解是负数，那么实数 m 的取值范围是　　（ D ）

A. $m<1$

B. $m>-1$ 且 $m\neq0$

C. $m>-1$

D. $m<-1$ 且 $m\neq-2$

5.（2023·上海中考）在分式方程 $\frac{2x-1}{x^2}+\frac{x^2}{2x-1}=5$ 中，设 $\frac{2x-1}{x^2}=y$，可得到关于 y 的整式方程为　　（ D ）

A. $y^2+5y+5=0$　　B. $y^2-5y+5=0$

C. $y^2+5y+1=0$　　D. $y^2-5y+1=0$

6.（2023·十堰中考）为了落实“双减”政策，进一步丰富文体活动，学校准备购进一批篮球和足球。已知每个篮球的价格比每个足球的价格多 20 元，用 1 500 元购进篮球的数量比用 800 元购进足球的数量多 5 个。如果设每个足球的价格为 x 元，那么可列方程为　　（ A ）

A. $\frac{1\ 500}{x+20}-\frac{800}{x}=5$

B. $\frac{1\ 500}{x-20}-\frac{800}{x}=5$

C. $\frac{800}{x}-\frac{1\ 500}{x+20}=5$

D. $\frac{800}{x}-\frac{1\ 500}{x-20}=5$

7.（2023·永州中考）若关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-4}-\frac{m}{4-x}=1$（$m$ 为常数）有增根，则增根是__$x=4$__。

8.（2023·台州中考）3 月 12 日植树节

期间，某校环保小卫士组织植树活动。第一组植树 12 棵；第二组比第一组多 6 人，植树 36 棵；结果两组平均每人植树的棵数相等，则第一组有__3__人。

9.（2023·连云港中考）解分式方程：$\frac{2x-5}{x-2}=\frac{3x-3}{x-2}-3$。

解：方程两边同乘$(x-2)$，得

$2x-5=3x-3-3(x-2)$，

去括号，得 $2x-5=3x-3-3x+6$，

移项、合并同类项，得 $2x=8$，

系数化为 1，得 $x=4$。

检验：当 $x=4$ 时，$x-2\neq0$，

所以原分式方程的解为 $x=4$。

10.（2023·扬州中考）甲、乙两名学生到离校 2.4 km 的人民公园参加志愿者活动，甲同学步行，乙同学骑自行车，骑自行车的速度是步行速度的 4 倍，甲同学出发 30 min 后乙同学出发，两名同学同时到达，求乙同学骑自行车的速度。

解：设甲同学步行的速度为 x km/h，则乙同学骑自行车的速度为 $4x$ km/h，

由题意，得$\frac{2.4}{x}-\frac{2.4}{4x}=\frac{30}{60}$，

解得 $x=3.6$，

经检验，$x=3.6$ 是原方程的解，且符合题意，

$\therefore 4x=4\times3.6=14.4$。

答：乙同学骑自行车的速度为 14.4 km/h。

第 7 讲　一元二次方程

重难点突破

重点 1　一元二次方程的解法

方法	方程类型	注意事项
直接开平方法	$(x+a)^2=b$	$b\geq0$ 时方程有解，$b<0$ 时方程无解
配方法	$x^2+px+q=0$	二次项系数若不为 1，先把系数化为 1，再进行配方
公式法	$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$	$b^2-4ac\geq0$ 时，方程有解；$b^2-4ac<0$ 时，方程无解
因式分解法	$(x+a)(x+b)=0$	方程的一边必须是 0，另一边可用任何方法分解因式

重点 2　一元二次方程根的判别式

关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式为 $\Delta=b^2-4ac$。

(1) $b^2-4ac>0\Leftrightarrow$一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根；

(2) $b^2-4ac=0\Leftrightarrow$一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根；

(3) $b^2-4ac<0\Leftrightarrow$一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实数根。

重点 3　列一元二次方程解决实际问题中常见的类型

1. 平均增长(降低)率问题

设 a 为原量，m 为平均增长(下降)率，n

为增长(下降)次数,b 为增长(下降)后的量,则有 $a(1\pm m)^n=b$。

2. 利润率问题

常见的关系式:利润 = 售价 − 进价;利润率 $=\frac{利润}{进价}\times100\%$;单个利润 × 销售数量 = 总利润。

3. 面积问题

这类问题属于几何图形的应用问题,解决问题的关键是将不规则图形分割或组合成规则图形,根据图形的面积或体积公式,找出未知量与已知量的内在关系并列出方程。

如图 2-7-1①,设矩形 $ABCD$ 中空白部分的宽为 x,则 $S_{阴影}=(a-2x)(b-2x)$。

如图 2-7-1②,栏杆总长为 a,BC 的长为 b,则 $S_{矩形ABCD}=\frac{1}{2}b(a-b)$。

如图 2-7-1③④⑤,设矩形 $ABCD$ 中阴影部分的宽为 x,则 $S_{空白}=(a-x)(b-x)$。

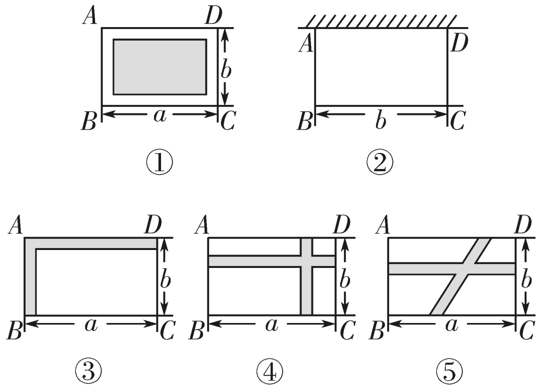


图 2-7-1

经典试题解析

知识点 1 解一元二次方程

例 1 (2022 · 凉山州中考)解方程:$x^2-2x-3=0$。

思路分析 利用因式分解法解方程即可。

解 因式分解,得 $(x+1)(x-3)=0$,

得 $x+1=0$ 或 $x-3=0$,

解得 $x=-1$ 或 $x=3$,

∴ 方程的解为 $x_1=-1$,$x_2=3$。

知识点 2 一元二次方程根的判别式

例 2 (2023 · 荆州中考)已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2-(2k+4)x+k-6=0$ 有两个不相等的实数根。

(1)求 k 的取值范围;

(2)当 $k=1$ 时,用配方法解方程。

思路分析 (1)结合已知条件,根据一元二次方程的定义及根的判别式即可求得 k 的取值范围;

(2)将 $k=1$ 代入方程,利用配方法解方程即可。

解 (1)∵ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2-(2k+4)x+k-6=0$ 有两个不相等的实数根,

∴ $\Delta=[-(2k+4)]^2-4k(k-6)>0$ 且 $k\neq0$,

解得 $k>-\frac{2}{5}$ 且 $k\neq0$。

(2)当 $k=1$ 时,

原方程为 $x^2-(2\times1+4)x+1-6=0$，即 $x^2-6x-5=0$，

配方得，$(x-3)^2=14$，

直接开平方得，$x-3=\pm\sqrt{14}$，

解得 $x_1=3+\sqrt{14}$，$x_2=3-\sqrt{14}$。

知识点 3　一元二次方程的应用

例 3　（2023·郴州中考）随着旅游旺季的到来，某景区游客人数逐月增加，2 月份游客人数为 1.6 万人，4 月份游客人数为 2.5 万人。

（1）求这两个月中该景区游客人数的月平均增长率；

（2）预计 5 月份该景区游客人数会继续增长，但增长率不会超过前两个月的月平均增长率。已知该景区 5 月 1 日至 5 月 21 日已接待游客 2.125 万人，则 5 月份后 10 天日均接待游客人数最多是多少万人？

思路分析　（1）设这两个月中该景区游客人数的月平均增长率为 x，由 2 月份游客人数为 1.6 万人，4 月份游客人数为2.5 万人，列出一元二次方程求解即可；

（2）设 5 月份后 10 天日均接待游客人数是 a 万人，由增长率不会超过前两个月的月平均增长率，列出不等式即可求解。

解　（1）设这两个月中该景区游客人数的月平均增长率为 x，

由题意可得 $1.6(1+x)^2=2.5$，

解得 $x=25\%$，$x=-\frac{9}{4}$（不合题意舍去）。

答：这两个月中该景区游客人数的月平均增长率为 25%。

（2）设 5 月份后 10 天日均接待游客人数是 a 万人，

由题意可得 $2.125+10a\leqslant2.5(1+25\%)$，

解得 $a\leqslant0.1$。

答：5 月份后 10 天日均接待游客人数最多是 0.1 万人。

陕西中考链接

（2022·陕西中考）在 20 世纪 70 年代，我国著名数学家华罗庚教授将黄金分割法作为一种“优选法”，在全国大规模推广，取得了很大成果。如图 2-7-2，利用黄金分割法，所做 EF 将矩形窗框 $ABCD$ 分为上下两部分，其中 E 为边 AB 的黄金分割点，即 $BE^2=AE\cdot AB$。已知 AB 为 2 m，则线段 BE 的长为__$(\sqrt{5}-1)$__m。

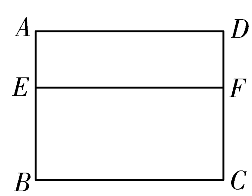


图 2-7-2

核心素养培优

1.（2023·眉山中考）关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m-2=0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是 （ D ）

A. $m<\frac{3}{2}$　　B. $m>3$

C. $m\leqslant 3$　　D. $m<3$

2.（2023·广安中考）已知 a,b,c 为常数，点 $P(a,c)$ 在第四象限，则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况是 （ A ）

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

3.（2023·聊城中考）若一元二次方程 $mx^2+2x+1=0$ 有实数解，则 m 的取值范围是 （ D ）

A. $m\geqslant -1$　　B. $m\leqslant 1$

C. $m\geqslant -1$ 且 $m\neq 0$　　D. $m\leqslant 1$ 且 $m\neq 0$

4.（2023·乐山中考）若关于 x 的一元二次方程 $x^2-8x+m=0$ 的两根为 x_1,x_2，且 $x_1=3x_2$，则 m 的值为 （ C ）

A. 4　B. 8　C. 12　D. 16

5.（2023·福建中考）根据福建省统计局数据，福建省 2020 年的地区生产总值为 43 903.89 亿元，2022 年的地区生产总值为 53 109.85 亿元。设这两年福建省地区生产总值的年平均增长率为 x，根据题意可列方程为 （ B ）

A. $43\ 903.89(1+x)=53\ 109.85$

B. $43\ 903.89(1+x)^2=53\ 109.85$

C. $43\ 903.89x^2=53\ 109.85$

D. $43\ 903.89(1+x^2)=53\ 109.85$

6.（2023·内江中考）已知 a,b 是方程 $x^2+3x-4=0$ 的两根，则 $a^2+4a+b-3=$ __-2__。

7.（2023·定西中考）关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+4c=0$ 有两个不相等的实数根，则 $c=$ __0（答案不唯一）__。（写出一个满足条件的值）

8.（2023·衡阳中考）已知关于 x 的方程 $x^2+mx-20=0$ 的一个根是 -4，则它的另一个根是 __5__。

9.（2023·杭州中考）设一元二次方程 $x^2+bx+c=0$。在下面的四组条件中选择其中一组 b,c 的值，使这个方程有两个不相等的实数根，并解这个方程。

①$b=2,c=1$；②$b=3,c=1$；③$b=3,c=-1$；④$b=2,c=2$。

注：如果选择多组条件分别作答，按第一个解答计分。

解：$x^2+bx+c=0$ 中 $a=1$，

①$b=2,c=1$ 时，$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times1=0$，方程有两个相等的实数根；

②$b=3,c=1$ 时，$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times1\times1=5>0$，方程有两个不相等的实数根；

③$b=3,c=-1$ 时，$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times1\times(-1)=13>0$，方程有两个不相等的实数根；

④$b=2,c=2$ 时，$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times2=-4<0$，方程没有实数根；

因此可选择②或③。

例：选择②$b=3,c=1$ 时，

一元二次方程 $x^2+3x+1=0$，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},$$

方程的解为 $x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$。

10.（2023·大连中考）为了让学生养成热爱图书的习惯，某学校抽出一部分资金用于购买书籍。已知 2020 年该学校用于购买图书的费用为 5 000 元，2022 年用于购买图书的费用是 7 200 元，求 2020—2022 年买书资金的年平均增长率。

解：设 2020—2022 年买书资金的年平均增长率为 x，

由题意得 $5\ 000(1+x)^2=7\ 200$，

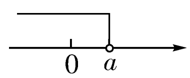
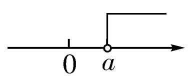
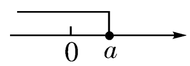
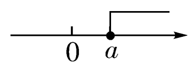
解得 $x=0.2=20\%$ 或 $x=-2.2<0$（不符合题意，舍去）。

答：2020—2022 年买书资金的年平均增长率为 20%。

第 8 讲　不等式（组）

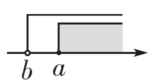
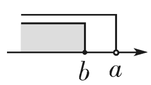
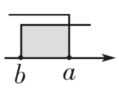
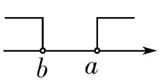
重难点突破

重点 1　一元一次不等式的解法及解集表示

不等式的解集	$x<a$	$x>a$	$x\leqslant a$	$x\geqslant a$
数轴表示				

温馨提示　在数轴上表示解集时，要注意“$<$”和“$>$”在数轴上表示为空心圆圈，“$\leqslant$”和“$\geqslant$”在数轴上表示为实心圆点；确定方向：大于向右，小于向左。

重点 2　一元一次不等式组的解法及解集表示

类型（$a>b$）	在数轴上的表示	口诀	解集
$\begin{cases}x\geqslant a,\\x>b\end{cases}$		同大取大	$x\geqslant a$
$\begin{cases}x<a,\\x\leqslant b\end{cases}$		同小取小	$x\leqslant b$
$\begin{cases}x\leqslant a,\\x\geqslant b\end{cases}$		大小小大取中间	$b\leqslant x\leqslant a$
$\begin{cases}x>a,\\x<b\end{cases}$		大大小小取不了	无解

温馨提示 解一元一次不等式组的一般步骤:(1)解每一个一元一次不等式;(2)在数轴上表示不等式的解集;(3)确定解集的公共部分;(4)写出不等式组的解集。

重点3 求不等式(组)的特殊解

不等式(组)的解往往有无数多个,但其特殊解在某些范围内是有限的,如整数解,非负整数解,求这些特殊解应先确定不等式(组)的解集,再找到相应答案。

温馨提示 在解含字母系数的不等式时,要讨论字母系数的正、负情况。如求不等式 $ax>b(a\neq0)$ 的解集要分:当 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况来讨论。当 $a>0$ 时,化 x 的系数为1,不等号不改变方向;当 $a<0$ 时,化 x 的系数为1,不等号改变方向。

重点4 列不等式(组)解决实际问题的常用关系词

常用关系词	大于、多于、超过、高于	小于、少于、不足、低于	至少、不低于、不小于、不少于	至多、不超过、不高于、不大于、不多于
符号	$>$	$<$	$\geqslant$	$\leqslant$

经典试题解析

知识点1 解一元一次不等式

例1 (2023·乐山中考)解不等式:$3x-2>x+4$。

思路分析 利用解一元一次不等式的方法进行求解即可。

解 移项,得 $3x-x>4+2$,

合并同类项,得 $2x>6$,

系数化为1,得 $x>3$,

$\therefore$ 原不等式的解集是 $x>3$。

知识点2 解一元一次不等式组

例2 (2023·扬州中考)解不等式组 $\begin{cases}2(x-1)+1>-3,\\ x-1\leqslant\dfrac{1+x}{3},\end{cases}$ 并把它的解集在数轴上表示出来。

思路分析 按照解一元一次不等式组的步骤进行计算即可。

解 $\begin{cases}2(x-1)+1>-3,①\\ x-1\leqslant\dfrac{1+x}{3},②\end{cases}$

解不等式①,得 $x>-1$,

解不等式②,得 $x\leqslant2$,

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $-1<x\leqslant2$,

$\therefore$ 该不等式组的解集在数轴上表示如图2-8-1所示:

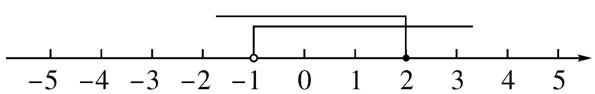


图 2-8-1

知识点3 不等式组的特殊解

例3 (2023·宜宾中考)若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}2x+1>x+a,\\ \dfrac{x}{2}+1\geqslant\dfrac{5}{2}x-9\end{cases}$ 的所有整数解的和为14,则整数 a 的值为________。

思路分析 解不等式组求出 $a-1<x\leqslant 5$，根据所有整数解的和为 14，列出关于 a 的不等式，解得 a 的取值范围，即可求解。

解答 解不等式 $2x+1>x+a$，得 $x>a-1$，

解不等式 $\frac{x}{2}+1\geqslant\frac{5}{2}x-9$，得 $x\leqslant 5$，

$\therefore a-1<x\leqslant 5$。

$\because$ 所有整数解的和为 14，

$\therefore$ 不等式组的整数解为 5，4，3，2 或 5，4，3，2，1，0，-1，

$\therefore 1\leqslant a-1<2$ 或 $-2\leqslant a-1<-1$，

$\therefore 2\leqslant a<3$ 或 $-1\leqslant a<0$。

$\because a$ 为整数，$\therefore a=2$ 或 $a=-1$，

故答案为 2 或 -1。

知识点 4 一元一次不等式组的实际应用

例 4 （2023·黄冈中考）某学校准备购进单价分别为 5 元和 7 元的 A，B 两种笔记本共 50 本作为奖品发放给学生，要求 A 种笔记本的数量不多于 B 种笔记本数量的 3 倍，不少于 B 种笔记本数量的 2 倍，则不同的购买方案种数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

思路分析 设购进 A 种笔记本为 x 本，则购进 B 种笔记本为 $(50-x)$ 本，根据题意列出一元一次不等式组，然后求整数解即可。

解答 设购进 A 种笔记本为 x 本，则购进 B 种笔记本为 $(50-x)$ 本，

由题意得 $\begin{cases}x\leqslant 3(50-x),\\x\geqslant 2(50-x),\end{cases}$

解得 $33\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 37\frac{1}{2}$。

$\because x$ 为正整数，$\therefore x$ 的取值为 34，35，36，37，

则不同的购买方案种数为 4。

故选 D。

陕西中考链接

1. （2023·陕西中考）解不等式：$\frac{3x-5}{2}>2x$。

解：去分母，得 $3x-5>4x$，

移项、合并同类项，得 $-x>5$，

系数化为 1，得 $x<-5$，

$\therefore$ 原不等式的解集为 $x<-5$。

2. （2022·陕西中考）解不等式组：$\begin{cases}x+2>-1,\\x-5\leqslant 3(x-1)。\end{cases}$

解：由 $x+2>-1$，得 $x>-3$，

由 $x-5\leqslant 3(x-1)$，得 $x\geqslant -1$，

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $x\geqslant -1$。

3.（2021·陕西中考）解不等式组：$\begin{cases}x+5<4,\\ \dfrac{3x+1}{2}\geqslant 2x-1。\end{cases}$

解：由 $x+5<4$，得 $x<-1$，

由 $\dfrac{3x+1}{2}\geqslant 2x-1$，得 $x\leqslant 3$，

∴ 原不等式组的解集为 $x<-1$。

核心素养培优

1.（2023·丽水中考）小霞原有存款 52 元，小明原有存款 70 元。从这个月开始，小霞每月存 15 元零花钱，小明每月存 12 元零花钱，设经过 n 个月后小霞的存款超过小明，可列不等式为（ A ）

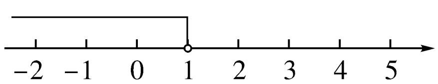
A. $52+15n>70+12n$

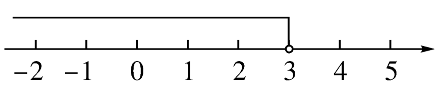
B. $52+15n<70+12n$

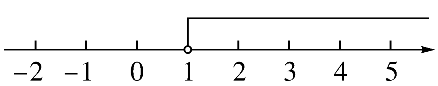
C. $52+12n>70+15n$

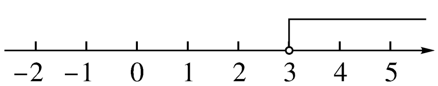
D. $52+12n<70+15n$

2.（2023·安徽中考）在数轴上表示不等式 $\dfrac{x-1}{2}<0$ 的解集，正确的是（ A ）

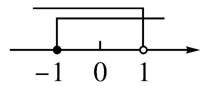
A. 

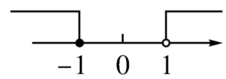
B. 

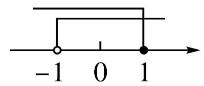
C. 

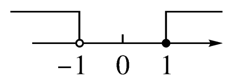
D. 

3.（2023·宁波中考）不等式组 $\begin{cases}x+1>0,\\ x-1\leqslant 0\end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是（ C ）

A. 

B. 

C. 

D. 

4.（2023·遂宁中考）若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}4(x-1)>3x-1,\\ 5x>3x+2a\end{cases}$ 的解集为 $x>3$，则 a 的取值范围是（ D ）

A. $a>3$　　B. $a<3$

C. $a\geqslant 3$　　D. $a\leqslant 3$

5.（2023·眉山中考）关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x>m+3,\\ 5x-2<4x+1\end{cases}$ 的整数解仅有 4 个，则 m 的取值范围是（ A ）

A. $-5\leqslant m<-4$

B. $-5<m\leqslant -4$

C. $-4\leqslant m<-3$

D. $-4<m\leqslant -3$

6.（2023·鄂州中考）已知不等式组 $\begin{cases}x-a>2,\\ x+1<b\end{cases}$ 的解集是 $-1<x<1$，则 $(a+b)^{2\,023}=$（ B ）

A. 0　　B. -1

C. 1　　　D. 2 023

7.（2023·大连中考）$9>-3x$ 的解集为__$x>-3$__。

8.（2023·滨州中考）不等式组 $\begin{cases}2x-4\geqslant 2,\\3x-7<8\end{cases}$ 的解集为__$3\leqslant x<5$__。

9.（2023·聊城中考）若不等式组 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}\geqslant\dfrac{x-2}{3},\\2x-m\geqslant x\end{cases}$ 的解集为 $x\geqslant m$，则 m 的取值范围是__$m\geqslant -1$__。

10.（2023·广东中考）某商品进价 4 元，标价 5 元出售，商家准备打折销售，但其利润率不能少于 10%，则最多可打__八八__折。

11.（2023·武汉中考）解不等式组 $\begin{cases}2x-4<2,①\\3x+2\geqslant x,②\end{cases}$ 请按下列步骤完成解答。

（1）解不等式①，得__$x<3$__；

（2）解不等式②，得__$x\geqslant -1$__；

（3）把不等式①和②的解集在数轴上表示出来；

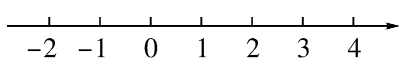
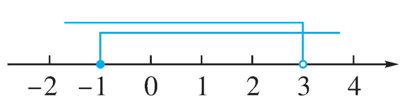


图 2-8-2

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来如图所示。



（4）原不等式组的解集是__$-1\leqslant x<3$__。

12.（2023·徐州中考）解不等式组：$\begin{cases}4x-5\leqslant 3,\\\dfrac{x-1}{3}<\dfrac{2x+1}{5}。\end{cases}$

解：由 $4x-5\leqslant 3$，得 $x\leqslant 2$，

由 $\dfrac{x-1}{3}<\dfrac{2x+1}{5}$，得 $x>-8$，

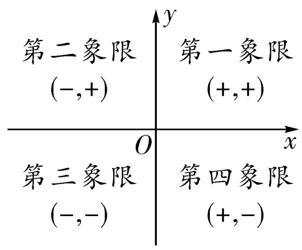
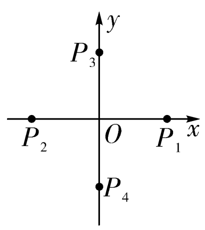
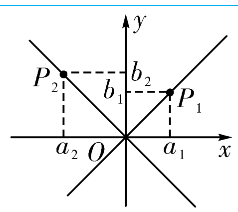
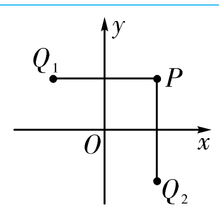
∴ 原不等式组的解集为 $-8<x\leqslant 2$。

第9讲 平面直角坐标系与函数概念

重难点突破

重点1 在平面直角坐标系中点的坐标特征

1. 点的坐标特征

点的位置	图示	具体内容	
各象限内		第一象限：$x>0,y>0$； 第二象限：$x<0,y>0$； 第三象限：$x<0,y<0$； 第四象限：$x>0,y<0$	
坐标轴上		x轴	点$P_1(a_1,b_1)$在正半轴，则$a_1>0,b_1=0$
			点$P_2(a_2,b_2)$在负半轴，则$a_2<0,b_2=0$
		y轴	点$P_3(a_3,b_3)$在正半轴，则$a_3=0,b_3>0$
			点$P_4(a_4,b_4)$在负半轴，则$a_4=0,b_4<0$
		原点	点$O(a,b)$在原点，则$a=0,b=0$
各象限角平分线上		第一、三象限角平分线上点的横、纵坐标相等，例如$P_1(a_1,b_1)$，其中$a_1=b_1$；第二、四象限角平分线上点的横、纵坐标互为相反数，例如$P_2(a_2,b_2)$，其中$a_2=-b_2$	
平行于坐标轴的直线上		平行于x轴的直线上的点的纵坐标相等；平行于y轴的直线上的点的横坐标相等。例如$P(a,b)$，$Q_1(c_1,d_1)$，$Q_2(c_2,d_2)$为坐标系中任意三点：①若$PQ_1 /\!/ x$轴$\Leftrightarrow b=d_1$；②若$PQ_2 /\!/ y$轴$\Leftrightarrow a=c_2$	

2. 对称点与平移点的坐标特征

（1）对称点的坐标特征

$P(a,b)\xleftrightarrow{\text{关于}x\text{轴对称}}P'(a,-b)$

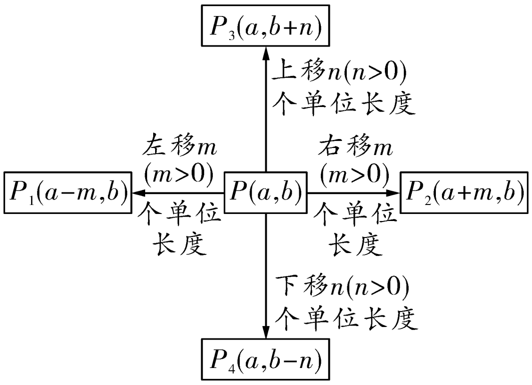
$P(a,b)\xleftrightarrow{\text{关于}y\text{轴对称}}P'(-a,b)$

$P(a,b)\xleftrightarrow{\text{关于原点对称}}P'(-a,-b)$

$P(a,b)\xleftrightarrow{\text{关于直线}x=m\text{对称}}P'(2m-a,b)$

$P(a,b)\xleftrightarrow{\text{关于直线}y=n\text{对称}}P'(a,2n-b)$

(2)平移点的坐标特征



(即:横坐标,右移加,左移减;纵坐标,上移加,下移减)

重点2 函数自变量的取值范围

1. 函数关系式是整式时,自变量的取值范围是任意实数;

2. 函数关系式是分式时,自变量的取值范围是使分式的分母不为零的实数;

3. 函数关系式是二次根式时,自变量的取值范围是使被开方的式子大于或等于零的实数;

4. 函数关系式中自变量出现在零次幂或负整数指数幂的底数中时,自变量的取值范围是使底数不为零的实数;

5. 当函数关系式表示实际问题时,自变量的取值不但要使函数关系式有意义,而且还必须使实际问题有意义。

经典试题解析

知识点1 点的坐标

例1 (2023·巴中中考)已知 a 为正整数,点 $P(4,2-a)$ 在第一象限中,则 $a=$________。

思路分析 根据平面直角坐标系中第一象限内的点的横、纵坐标都为正数,得到 $2-a>0$,即可求出 a 的取值范围,再根据 a 为正整数即可得到 a 的值。

解答 ∵ 点 $P(4,2-a)$ 在第一象限,

∴ $2-a>0$,

∴ $a<2$,又 a 为正整数,

∴ $a=1$。

故答案为1。

知识点2 确定函数自变量的取值范围

例2 (2023·达州中考)函数 $y=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ 的自变量 x 的取值范围是________。

思路分析 由二次根式的被开方数大于或等于0可得 $x-1\geqslant0$,由分式有意义的性质可得 $x-1\neq0$,即可求出自变量 x 的取值范围。

解答 根据题意得 $x-1\geqslant0$ 且 $x-1\neq0$,

即 $x-1>0$,解得 $x>1$。

故答案为 $x>1$。

知识点3 函数图像的识别

例3 (2023·广安中考)如图2-9-1,用弹簧测力计将一铁块悬于盛有水的水槽中,然后匀速向上提起,使铁块完全露出水面,并上升一定高度,则下列能反映弹簧测力计的读数 y(单位:N)与铁块被提起的时间 x(单位:s)之间的函数关系的大致图像是 (   )

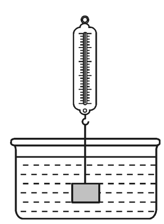
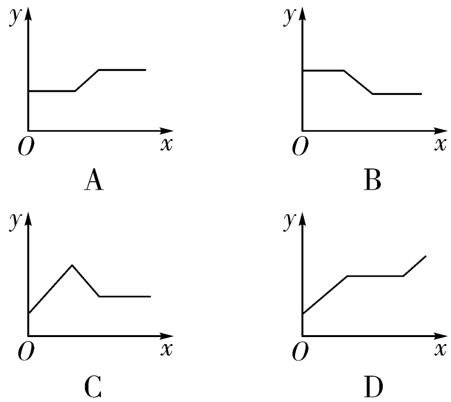


图2-9-1



思路分析　根据题意可将铁块被拉起的过程分为 3 段：①当铁块露出水面之前，根据 $F_{拉}+F_{浮}=G$ 分析得出弹簧测力计的读数不变；②当铁块逐渐露出水面的过程中，根据 $F_{拉}+F_{浮}=G$ 分析得弹簧测力计的读数逐渐增大；③当铁块完全露出水面之后，根据 $F_{拉}=G$ 分析得弹簧测力计的读数不变。据此即可判断函数图像。

解答　根据浮力的知识可知，当铁块露出水面之前，$F_{拉}+F_{浮}=G$，此过程浮力不变，铁块的重力不变，故拉力不变，即弹簧测力计的读数不变；

当铁块逐渐露出水面的过程中，$F_{拉}+F_{浮}=G$，此过程浮力逐渐减小，铁块重力不变，故拉力逐渐增大，即弹簧测力计的读数逐渐增大；

当铁块完全露出水面之后，$F_{拉}=G$，此过程拉力等于铁块重力，即弹簧测力计的读数不变。综上，弹簧测力计的读数先不变，再逐渐增大，最后不变。

故选 A。

核心素养培优

1. (2023・台州中考)图 2-9-2 是中国象棋棋盘的一部分，建立如图 2-9-2 所示的平面直角坐标系，已知“車”所在位置的坐标为 $(-2,2)$，则“炮”所在位置的坐标为　(　A　)

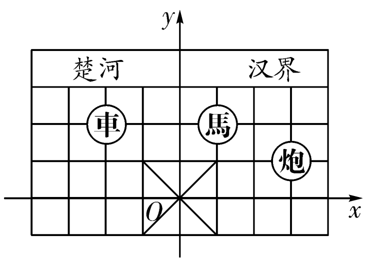


图 2-9-2

A. $(3,1)$　　B. $(1,3)$

C. $(4,1)$　　D. $(3,2)$

2. (2023・绍兴中考)在平面直角坐标系中，将点 (m,n) 先向右平移 2 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，最后所得点的坐标是　(　D　)

A. $(m-2,n-1)$

B. $(m-2,n+1)$

C. $(m+2,n-1)$

D. $(m+2,n+1)$

3. (2023・怀化中考)在平面直角坐标系中，点 $P(2,-3)$ 关于 x 轴对称的点 P' 的坐标是　(　D　)

A. $(-2,-3)$　　B. $(-2,3)$

C. $(2,-3)$　　D. $(2,3)$

4. (2023・丽水中考)在平面直角坐标系中，点 $P(-1,m^2+1)$ 位于　(　B　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

5. (2023・凉山州中考)点 $P(2,-3)$ 关于原点对称的点 P' 的坐标是　(　D　)

A. $(2,3)$　　B. $(-2,-3)$

C. $(-3,2)$　　D. $(-2,3)$

6. (2023・郴州中考)第 11 届中国(湖

南)矿物宝石国际博览会在我市举行,小方一家上午9:00开车前往会展中心参观。途中汽车发生故障,原地修车花了一段时间。车修好后,他们继续开车赶往会展中心。如图2-9-3是他们出发后离家的距离 s 与时间 x 的函数图像。分析图中信息,下列说法正确的是 (D)

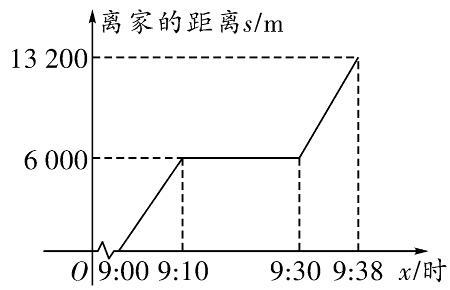


图 2-9-3

A. 途中修车花了 30 min

B. 修车之前的平均速度是 500 m/min

C. 车修好后的平均速度是 800 m/min

D. 车修好后的平均速度是修车之前的平均速度的 1.5 倍

7. (2023·遂宁中考)如图2-9-4①,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=10$,$BC=6$,$AC=8$,点 P 为线段 AB 上的动点。点 P 以每秒 1 个单位长度的速度从点 A 向点 B 移动,到达点 B 时停止。过点 P 作 $PM\perp AC$,垂足为 M,作 $PN\perp BC$,垂足为点 N,连接 MN,线段 MN 的长度 y 与点 P 的运动时间 t 的函数关系如图2-9-4②所示,则函数图像最低点 E 的坐标为 (C)

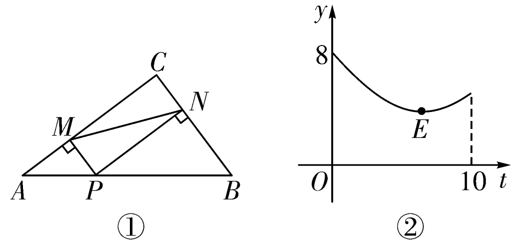


图 2-9-4

A. $(5,5)$　　B. $\left(6,\frac{24}{5}\right)$

C. $\left(\frac{32}{5},\frac{24}{5}\right)$　　D. $\left(\frac{32}{5},5\right)$

8. (2023·广安中考)函数 $y=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ 的自变量 x 的取值范围是 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 1$。

9. (2023·烟台中考)如图2-9-5①,在 $\triangle ABC$ 中,动点 P 从点 A 出发沿折线 $AB\to BC\to CA$ 匀速运动至点 A 后停止。设点 P 的运动路程为 x,线段 AP 的长度为 y,图2-9-5②是 y 与 x 的函数关系的大致图像,其中点 F 为曲线 DE 的最低点,则 $\triangle ABC$ 的高 CG 的长为 $\frac{7\sqrt{3}}{2}$。

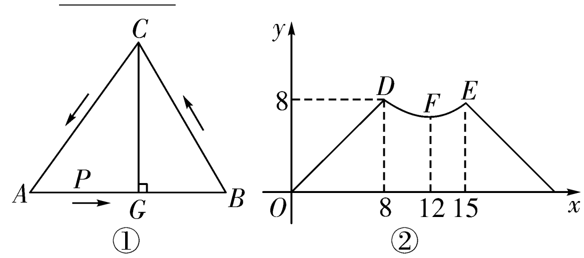


图 2-9-5

第 10 讲　一次函数

重难点突破

重点 1　一次函数的判定方法

若在一个变化过程中,两个变量具备同幅度增大或同幅度减小的关系,说明两个变量之间的关系是一次函数关系,即任意两个

相邻的两组数值满足$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$的值为定值，则 y 与 x 之间就是一次函数的关系。特别地，若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$（$x_1y_1\neq0$，$x_2y_2\neq0$）在同一正比例函数的图像上，则$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=k$（$k$ 为定值），反之亦然。

重点2　一次函数图像与几何变换

1. 一次函数图像的平移

(1)直线 $y=kx+b(k\neq0)$向上或向下平移 $m(m>0)$个单位长度时，解析式变为 $y=kx+b+m$ 或 $y=kx+b-m$，可简记为“上加下减”。

(2)直线 $y=kx+b(k\neq0)$向左或向右平移 $m(m>0)$个单位长度时，解析式变为 $y=k(x+m)+b$ 或 $y=k(x-m)+b$，可简记为“左加右减”。

2. 一次函数图像的对称

(1)直线 $y=kx+b(k\neq0)$关于 x 轴对称，横坐标不变，纵坐标变为原来的相反数，就是 x 不变，y 变成 $-y$：$-y=kx+b$，即 $y=-kx-b$。

(2)直线 $y=kx+b(k\neq0)$关于 y 轴对称，纵坐标不变，横坐标变为原来的相反数，就是 y 不变，x 变成 $-x$：$y=k(-x)+b$，即 $y=-kx+b$。

(3)直线 $y=kx+b(k\neq0)$关于原点对称，横纵坐标都变为原来的相反数，就是 x 变成 $-x$，y 变成 $-y$：$-y=k(-x)+b$，即 $y=kx-b$。

3. 一次函数图像的旋转

(1)直线 $y=kx+b(k\neq0)$绕原点旋转 $180°$（即关于原点对称），解析式变为 $y=kx-b$。

(2)直线 $y=k_1x+b_1(k\neq0)$绕直线上一点旋转 $90°$后，解析式表示为 $y=k_2x+b_2$，即有 $k_1k_2=-1$，根据求原直线上一点旋转后的对应点的坐标可得旋转后的直线解析式。

(3)直线 $y=kx+b(k\neq0)$绕某一点旋转 $30°$，$45°$，$60°$等特殊角度后，可通过构造直角三角形，找全等三角形等方法，求出原直线上两点绕某一点旋转后的对应点的坐标，利用待定系数法求旋转后的直线解析式。

难点　一次函数与一次方程(组)、不等式的关系

一次函数与一元一次方程	一元一次方程 $kx+b=0$ 的解是一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的函数值 $y=0$ 时，自变量 x 的值，也就是直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 与 x 轴的交点 $\left(-\frac{b}{k},0\right)$的横坐标的值
一次函数与一元一次不等式	一元一次不等式 $kx+b>0(k\neq0)$的解集是一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$的函数值 $y>0$ 时，自变量 x 的取值范围，即对应的函数图像在 x 轴上方；一元一次不等式 $kx+b<0(k\neq0)$的解集是一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$的函数值 $y<0$ 时，自变量 x 的取值范围，即对应的函数图像在 x 轴下方
一次函数与二元一次方程组	从“数”的角度看，解二元一次方程组相当于考虑自变量为何值时两函数值相等，以及两函数值是何值；从“形”的角度看，解二元一次方程组 $\begin{cases}y=k_1x+b_1,\\y=k_2x+b_2,\end{cases}$就是确定两直线 $y=k_1x+b_1$ 与 $y=k_2x+b_2$ 的交点坐标

经典试题解析

知识点 1　正比例函数的图像与性质

例 1　(2023・武威中考)若直线 $y=kx$(k 是常数,$k\neq0$)经过第一、三象限,则 k 的值可以为　　(　　)

A. -2　　B. -1

C. $-\frac{1}{2}$　　D. 2

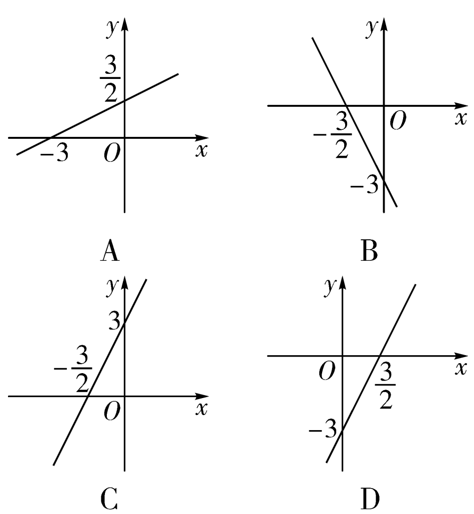
思路分析　正比例函数 $y=kx$(k 是常数,$k\neq0$)的图像经过第一、三象限,则 $k>0$。

解答　∵ 直线 $y=kx$(k 是常数,$k\neq0$)经过第一、三象限,

∴ $k>0$。故选 D。

知识点 2　一次函数的图像与性质

例 2　(2023・通辽中考)在平面直角坐标系中,一次函数 $y=2x-3$ 的图像是　　(　　)



思路分析　依据一次函数 $y=2x-3$ 的图像经过点 $(0,-3)$ 和 $\left(\frac{3}{2},0\right)$,即可得到一次函数 $y=2x-3$ 的图像经过第一、三、四象限。

解答　一次函数 $y=2x-3$ 中,令 $x=0$,则 $y=-3$;令 $y=0$,则 $x=\frac{3}{2}$,∴ 一次函数 $y=2x-3$ 的图像经过点 $(0,-3)$ 和 $\left(\frac{3}{2},0\right)$,∴ 一次函数 $y=2x-3$ 的图像经过第一、三、四象限。

故选 D。

温馨提示　一次函数 $y=kx+b$ 的图像有以下四种情况:

①当 $k>0,b>0$ 时,函数 $y=kx+b$ 的图像经过第一、二、三象限;

②当 $k>0,b<0$ 时,函数 $y=kx+b$ 的图像经过第一、三、四象限;

③当 $k<0,b>0$ 时,函数 $y=kx+b$ 的图像经过第一、二、四象限;

④当 $k<0,b<0$ 时,函数 $y=kx+b$ 的图像经过第二、三、四象限。

例 3　(2023・巴中中考)一次函数 $y=(k-3)x+2$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小,则 k 的取值范围是　　(　　)

A. $k>0$　　B. $k<0$

C. $k>3$　　D. $k<3$

思路分析　根据一次函数 $y=(k-3)x+2$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小得到 $k-3<0$,从而求出 k 的取值范围。

解答　∵ 一次函数 $y=(k-3)x+2$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小,

∴ $k-3<0$,∴ $k<3$。

故选 D。

温馨提示　对于一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq0$），当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小。

知识点 3　一次函数图像与几何变换

例 4　（2023·包头中考）在平面直角坐标系中，将正比例函数 $y=-2x$ 的图像向右平移 3 个单位长度得到一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图像，则该一次函数的解析式为（　　）

A. $y=-2x+3$　　B. $y=-2x+6$

C. $y=-2x-3$　　D. $y=-2x-6$

思路分析　利用函数图像的平移规律：左加右减，上加下减，即可得到答案。

解答　将直线 $y=-2x$ 向右平移 3 个单位长度，可得一次函数的解析式为 $y=-2(x-3)=-2x+6$。

故选 B。

知识点 4　待定系数法求一次函数的解析式

例 5　（2023·东莞中考）已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点（0，1）与点（2，5），求该一次函数的解析式。

思路分析　将（0，1）与（2，5）代入 $y=kx+b$，解方程组即可解答。

解　将（0，1）与（2，5）代入 $y=kx+b$ 得，

$$\begin{cases}b=1,\\2k+b=5,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=2,\\b=1,\end{cases}$$

∴ 一次函数的解析式为 $y=2x+1$。

知识点 5　一次函数与不等式的关系

例 6　（2022·扬州中考）如图 2-10-1，一次函数 $y=kx+b$（$k<0$）的图像经过点 P，则关于 x 的不等式 $kx+b>3$ 的解集为________。

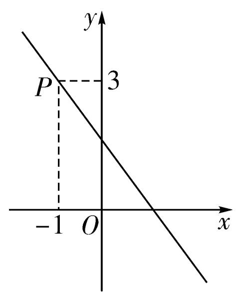


图 2-10-1

思路分析　观察一次函数的图像，可知当 $y>3$ 时，x 的取值范围是 $x<-1$，则 $kx+b>3$ 的解集是 $x<-1$。

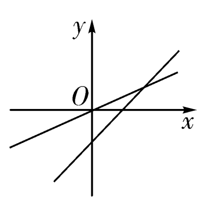
解答　由一次函数的图像得，当 $y>3$ 时，$x<-1$，

∴ $y=kx+b>3$ 的解集是 $x<-1$。

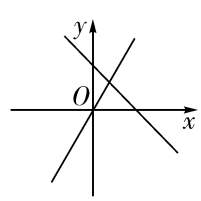
故答案为 $x<-1$。

陕西中考链接

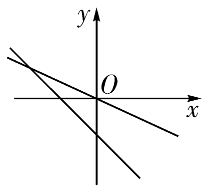
1.（2023·陕西中考）在同一平面直角坐标系中，函数 $y=ax$ 和 $y=x+a$（a 为常数，$a<0$）的图像可能是（　D　）



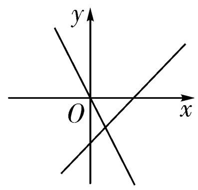
A



B



C



D

2. (2022 · 陕西中考)在同一平面直角坐标系中,直线 $y=-x+4$ 与 $y=2x+m$ 相交于点 $P(3,n)$,则关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}x+y-4=0,\\2x-y+m=0\end{cases}$ 的解为 (C)

A. $\begin{cases}x=-1,\\y=5\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=1,\\y=3\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=3,\\y=1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=9,\\y=-5\end{cases}$

3. (2021 · 陕西中考)在平面直角坐标系中,若将一次函数 $y=2x+m-1$ 的图像向左平移 3 个单位长度后,得到一个正比例函数的图像,则 m 的值为 (A)

A. -5　　B. 5　　C. -6　　D. 6

4. (2020 · 陕西中考)在平面直角坐标系中,O 为坐标原点。若直线 $y=x+3$ 分别与 x 轴、直线 $y=-2x$ 交于点 A,B,则△AOB 的面积为 (B)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

核心素养培优

1. 若点 $A(4,m)$ 在正比例函数 $y=-\frac{1}{2}x$ 的图像上,则 m 的值是 (B)

A. 2　　B. -2

C. 8　　D. -8

2. 在平面直角坐标系中,一次函数 $y=-2x-6$ 的图像经过点 (B)

A. $(-4,1)$　　B. $(-4,2)$

C. $(-4,-1)$　　D. $(-4,-2)$

3. (2023 · 山西中考)一种弹簧秤最大能称不超过 10 kg 的物体,不挂物体时弹簧的长为 12 cm,每挂重 1 kg 物体,弹簧伸长 0.5 cm,在弹性限度内,挂重后弹簧的长度 y(cm)与所挂物体的质量 x(kg)之间的函数关系式为 (B)

A. $y=12-0.5x$

B. $y=12+0.5x$

C. $y=10+0.5x$

D. $y=0.5x$

4. (2023 · 荆州中考)如图 2-10-2,直线 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 分别与 x 轴,y 轴交于点 A,B,将△OAB 绕着点 A 顺时针旋转 90°得到△CAD,则点 B 的对应点 D 的坐标是 (C)

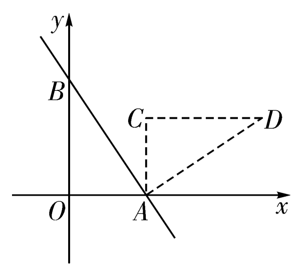


图 2-10-2

A. $(2,5)$　　B. $(3,5)$

C. $(5,2)$　　D. $(\sqrt{13},2)$

5. 如图 2-10-3,在平面直角坐标系中,直线 $y=2x+b$ 与直线 $y=-3x+6$ 相交于点 A,

则关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}y=2x+b,\\y=-3x+6\end{cases}$ 的解是　　　　（　B　）

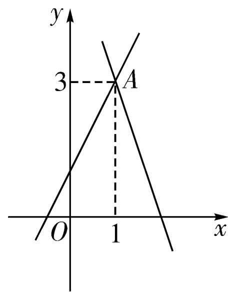


图 2-10-3

A. $\begin{cases}x=2,\\y=0\end{cases}$　　　B. $\begin{cases}x=1,\\y=3\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=-1,\\y=9\end{cases}$　　　D. $\begin{cases}x=3,\\y=1\end{cases}$

6. 已知正比例函数 $y=\frac{2}{3}x$ 的图像经过点 $A(-1,y_1)$，$B(-2,y_2)$，则 y_1 __>__ y_2。（填“>”“<”或“=”）

7. (2023·郴州中考)在一次函数 $y=(k-2)x+3$ 中，y 随 x 的增大而增大，则 k 的值可以是__3(答案不唯一)__。(任写一个符合条件的数即可)

8. (2023·南充中考)如图 2-10-4，直线 $y=kx-2k+3$（k 为常数，$k<0$）与 x，y 轴分别交于点 A，B，则 $\frac{2}{OA}+\frac{3}{OB}$ 的值是__1__。

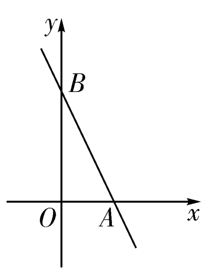


图 2-10-4

9. (2023·杭州中考)在“探索一次函数 $y=kx+b$ 的系数 k，b 与图像的关系”活动中，老师给出了直角坐标系中的三个点：$A(0,2)$，$B(2,3)$，$C(3,1)$。同学们画出了经过这三个点中每两个点的一次函数的图像，并得到对应的函数解析式 $y_1=k_1x+b_1$，$y_2=k_2x+b_2$，$y_3=k_3x+b_3$，分别计算 k_1+b_1，k_2+b_2，k_3+b_3 的值，其中最大的值等于__5__。

10. (2023·雅安中考改编)在平面直角坐标系中，将函数 $y=x$ 的图像绕坐标原点逆时针旋转 90°，再向上平移 1 个单位长度，所得直线的函数解析式为__$y=-x+1$__。

11. (2023·温州中考)如图 2-10-5，在平面直角坐标系中，点 $A(2,m)$ 在直线 $y=2x-\frac{5}{2}$ 上，过点 A 的直线交 y 轴于点 $B(0,3)$。

(1)求 m 的值和直线 AB 的函数解析式；

(2)若点 $P(t,y_1)$ 在线段 AB 上，点 $Q(t-1,y_2)$ 在直线 $y=2x-\frac{5}{2}$ 上，求 y_1-y_2 的最大值。

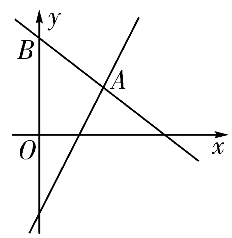


图 2-10-5

解：(1)把点 $A(2,m)$ 代入 $y=2x-\frac{5}{2}$，得 $m=\frac{3}{2}$。

设直线 AB 的函数解析式为 $y=kx+b$，把点 $A\left(2,\frac{3}{2}\right)$，$B(0,3)$ 代入得

$\begin{cases}2k+b=\frac{3}{2},\\b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{3}{4},\\b=3,\end{cases}$

∴ 直线 AB 的函数解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$。

(2)∵ 点 $P(t,y_1)$ 在线段 AB 上，点 $Q(t-1,y_2)$ 在直线 $y=2x-\frac{5}{2}$ 上，

∴ $y_1=-\frac{3}{4}t+3(0\leqslant t\leqslant 2)$，$y_2=2(t-1)$

$-\frac{5}{2}=2t-\frac{9}{2}$,

$\therefore y_1-y_2=-\frac{3}{4}t+3-\left(2t-\frac{9}{2}\right)=-\frac{11}{4}t+\frac{15}{2}$。

$\because k=-\frac{11}{4}<0$,

$\therefore y_1-y_2$ 的值随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $t=0$ 时,y_1-y_2 取最大值,最大值为 $\frac{15}{2}$。

第 11 讲　一次函数的应用

重难点突破

重　点　一次函数的实际应用

解决一次函数实际应用问题的一般步骤:

(1)仔细审题,确定两个变量;

(2)根据题目中数量关系列出关系式或用待定系数法确定出一次函数的关系式,依据实际情况确定自变量的取值范围;

(3)根据条件,判断解题方向。可能出现的类型:①已知自变量求因变量的值,转化为求函数值;②已知因变量求自变量的值,构造方程求解;③确定因变量的最值时,设法确定出自变量的取值范围,再根据函数的增减性求解。

经典试题解析

知识点 1　文字型一次函数的实际应用

例 1　(2023 · 扬州中考)近年来,市民交通安全意识逐步增强,头盔需求量增大。某商店购进甲、乙两种头盔,已知购买甲种头盔 20 只,乙种头盔 30 只,共花费 2 920 元,甲种头盔的单价比乙种头盔的单价高 11 元。

(1)甲、乙两种头盔的单价各是多少元?

(2)商店决定再次购进甲、乙两种头盔共 40 只,正好赶上厂家进行促销活动,促销方式如下:甲种头盔按单价的八折出售,乙种头盔每只降价 6 元出售。如果此次购买甲种头盔的数量不低于乙种头盔数量的一半,那么应购买多少只甲种头盔,使此次购买头盔的总费用最小?最小费用是多少元?

思路分析　(1)设甲种头盔的单价为 x 元,乙种头盔的单价为 y 元,根据购买甲种头盔 20 只,乙种头盔 30 只,共花费 2 920 元;甲种头盔的单价比乙种头盔的单价高 11 元,列二元一次方程组,求解即可;

（2）设再次购进甲种头盔 m 只，总费用为 w 元，根据此次购买甲种头盔的数量不低于乙种头盔数量的一半，列一元一次不等式，求出 m 的取值范围，再表示出 w 与 m 的一次函数关系式，根据一次函数的增减性即可确定总费用最小时甲种头盔购买的数量，进一步求出最小费用即可。

解　（1）设甲种头盔的单价为 x 元，乙种头盔的单价为 y 元，

根据题意，得 $\begin{cases}20x+30y=2\,920,\\x-y=11,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=65,\\y=54。\end{cases}$

答：甲种头盔的单价是 65 元，乙种头盔的单价是 54 元。

（2）设再次购进甲种头盔 m 只，购买头盔的总费用为 w 元，

根据题意，得 $m\geqslant\frac{1}{2}(40-m)$，解得 $m\geqslant\frac{40}{3}$，

$w=65\times0.8m+(54-6)(40-m)=4m+1\,920$。

$\because 4>0$，

$\therefore w$ 随着 m 的增大而增大，

当 $m=14$ 时，w 取得最小值，

即购买 14 只甲种头盔时，总费用最小，最小费用为 $14\times4+1\,920=1\,976$（元）。

答：购买 14 只甲种头盔时，购买头盔的总费用最小，最小费用为 1 976 元。

知识点 2　表格型一次函数的实际应用

例 2　（2023·连云港中考）目前，我市对市区居民用气户的燃气收费，以户为基础、年为计算周期设定了如下表的三个气量阶梯：

阶梯	年用气量	销售价格/（元/m^3）	备注
第一阶梯	0～400 m^3（含 400）的部分	2.67	若家庭人口超过 4 人的，每增加 1 人，第一、二阶梯年用气量的上限分别增加 100 m^3，200 m^3
第二阶梯	400～1 200 m^3（含 1 200）的部分	3.15	
第三阶梯	1 200 m^3 以上的部分	3.63	

（1）一户家庭人口为 3 人，年用气量为 200 m^3，则该年此户需缴纳燃气费用为________元；

（2）一户家庭人口不超过 4 人，年用气量为 x m^3（$x>1\,200$），该年此户需缴纳燃气费用为 y 元，求 y 关于 x 的函数解析式；

（3）甲户家庭人口为 3 人，乙户家庭人口为 5 人，某年甲户、乙户缴纳的燃气费用均为 3 855 元，求该年乙户比甲户多用多少立方米的燃气。（结果精确到 1 m^3）

思路分析　（1）用该户年用气量乘第一阶梯的燃气价格即可；

（2）根据题意按第一、二、三阶梯燃气价格写出函数解析式即可；

（3）先根据甲户、乙户缴纳的燃气费用均为 3 855 元，判断甲、乙两家年用气量的范围，再分别列方程计算出燃气量即可。

解　（1）解析：$200\times2.67=534$（元）。故答案为 534。

（2）根据题意得 $y=400\times2.67+(1\,200-400)\times3.15+3.63(x-1\,200)=3.63x-768$，

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y=3.63x-768(x>1\ 200)$。

(3)$\because 400\times2.67+(1\ 200-400)\times3.15=3\ 588<3\ 855$,

$\therefore$ 甲户该年的用气量达到了第三阶梯,

由(2)知,当 $y=3\ 855$ 时,$3.63x-768=3\ 855$,

解得 $x\approx1\ 273.6$。

又$\because 2.67\times(100+400)+3.15\times(1\ 200+200-500)=4\ 170>3\ 855$,

且 $2.67\times(100+400)=1\ 335<3\ 855$,

$\therefore$ 乙户该年的用气量达到第二阶梯,但未达到第三阶梯,

设乙户年用气量为 a m^3,则有 $2.67\times500+3.15(a-500)=3\ 855$,

解得 $a=1\ 300$,

$1\ 300-1\ 273.6=26.4\approx26$ m^3,

答:该年乙户比甲户多用约 26 m^3 的燃气。

知识点 3 图像型一次函数的实际应用

例 3 (2023·绥化中考)某校组织师生参加夏令营活动,现准备租用 A,B 两型客车(每种型号的客车至少租用一辆)。A 型车每辆租金 500 元,B 型车每辆租金 600 元。若 5 辆 A 型车和 2 辆 B 型车坐满后共载客 310 人;3 辆 A 型车和 4 辆 B 型车坐满后共载客 340 人。

(1)每辆 A 型车、B 型车坐满后各载客多少人?

(2)若该校计划租用 A 型和 B 型两种客车共 10 辆,总租金不高于 5 500 元,并将全校 420 人载至目的地。该校有几种租车方案?哪种租车方案最省钱?

(3)在这次活动中,学校除租用 A,B 两型客车外,又派出甲、乙两辆器材运输车。已知从学校到夏令营目的地的路程为 300 km,甲车从学校出发 0.5 h 后,乙车才从学校出发,却比甲车早 0.5 h 到达目的地。图 2-11-1 是两车离开学校的路程 s(km)与甲车行驶的时间 t(h)之间的函数图像。根据图像信息,求甲、乙两车第一次相遇后,t 为何值时两车相距 25 km。

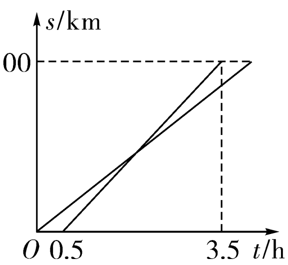


图 2-11-1

思路分析 (1)设每辆 A 型车坐满后载客 x 人,每辆 B 型车坐满后载客 y 人,根据 5 辆 A 型车和 2 辆 B 型车坐满后共载客 310 人;3 辆 A 型车和 4 辆 B 型车坐满后共载客 340 人列方程组解答;

(2)设租用 A 型车 m 辆,则租用 B 型车 $(10-m)$ 辆,根据题意,列出不等式组得到 $5\leqslant m\leqslant8\frac{2}{3}$。又 m 是正整数,故 m 可取 5,6,7,8,共有 4 种租车方案。设总租金为 w 元,有 $w=500m+600(10-m)=-100m+6\ 000$,由一次函数的性质可得租用 A 型车 8 辆,租用 B 型车 2 辆最省钱;

(3)设 $s_{甲}=k_1t$,$s_{乙}=k_2t+b$,用待定系数法分别求出解析式,根据两车第一次相遇后,相距 25 km,可得 $100t-50-75t=25$ 或 $300-75t=25$,即可解答。

解 (1)设每辆 A 型车坐满后载客 x 人,每辆 B 型车坐满后载客 y 人,

根据题意,得$\begin{cases}5x+2y=310,\\3x+4y=340,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=40,\\y=55,\end{cases}$

∴ 每辆 A 型车坐满后载客 40 人，每辆 B 型车坐满后载客 55 人。

（2）设租用 A 型车 m 辆，则租用 B 型车 $(10-m)$ 辆，

由题意得$\begin{cases}500m+600(10-m)\leqslant 5\,500,\\40m+55(10-m)\geqslant 420,\end{cases}$

解得 $5\leqslant m\leqslant 8\dfrac{2}{3}$。

∵ m 是正整数，

∴ m 可取 5，6，7，8，

∴ 共有 4 种租车方案。

设总租金为 w 元，

根据题意得 $w=500m+600(10-m)=-100m+6\,000$。

∵ $-100<0$，∴ w 随 m 的增大而减小，

∴ 当 $m=8$ 时，w 最小，

∴ 租用 A 型车 8 辆，租用 B 型车 2 辆最省钱。

（3）设 $s_{甲}=k_1t(k_1\neq 0)$，把(4，300)代入得 $300=4k_1$，

解得 $k_1=75$，∴ $s_{甲}=75t$。

设 $s_{乙}=k_2t+b(k_2\neq 0)$，把(0.5，0)，(3.5，300)，代入得

$\begin{cases}0.5k_2+b=0,\\3.5k_2+b=300,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k_2=100,\\b=-50,\end{cases}$

∴ $s_{乙}=100t-50$。

∵ 两车第一次相遇后，相距 25 km，

∴ $100t-50-75t=25$ 或 $300-75t=25$，

解得 $t=3$ 或 $t=\dfrac{11}{3}$，

∴ 在甲、乙两车第一次相遇后，当 $t=3$ 或 $t=\dfrac{11}{3}$ 时，两车相距 25 km。

陕西中考链接

1. (2023 · 陕西中考)经验表明，树在一定的成长阶段，其胸径(树的主干在地面以上 1.3 m 处的直径)越大，树就越高。通过对某种树进行测量研究，发现这种树的树高 y(m)是其胸径 x(m)的一次函数。已知这种树的胸径为 0.2 m 时，树高为 20 m；这种树的胸径为 0.28 m 时，树高为 22 m。

（1）求 y 关于 x 的函数解析式；

（2）当这种树的胸径为 0.3 m 时，其树高是多少？

解：（1）设 $y=kx+b(k\neq 0)$，

根据题意，得$\begin{cases}0.2k+b=20,\\0.28k+b=22,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=25,\\b=15,\end{cases}$

∴ y 关于 x 的函数解析式为 $y=25x+15$。

（2）当 $x=0.3$ 时，

$y=25\times 0.3+15=22.5$，

∴ 当这种树的胸径为 0.3 m 时，其树高为 22.5 m。

2. (2022 · 陕西中考)图 2-11-2 是一个“函数求值机”的示意图，其中 y 是 x 的函数。下面表格中，是通过该“函数求值机”得到的几组 x 与 y 的对应值。

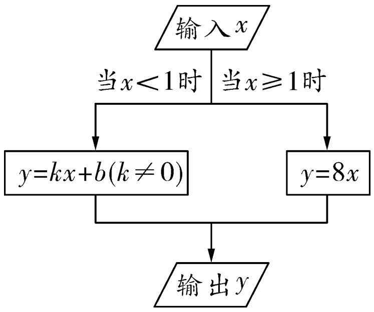


图 2-11-2

输入 x	…	-6	-4	-2	0	2	…
输出 y	…	-6	-2	2	6	16	…

根据以上信息,解答下列问题:

(1)当输入的 x 值为1时,输出的 y 值为<u>　8　</u>;

(2)求 k,b 的值;

(3)当输出的 y 值为0时,求输入的 x 值。

解:(2)将$(-2,2)$,$(0,6)$代入 $y=kx+b$,得

$\begin{cases}-2k+b=2,\\ b=6,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=2,\\ b=6。\end{cases}$

(3)令 $y=0$,由 $y=8x$,得 $0=8x$,

$\therefore x=0<1$(舍去)。

由 $y=2x+6$,得 $0=2x+6$,

$\therefore x=-3<1$,

$\therefore$ 输出的 y 值为0时,输入的 x 值为-3。

3. (2021·陕西中考)在一次机器"猫"抓机器"鼠"的展演测试中,"鼠"先从起点出发,1 min 后,"猫"从同一起点出发去追"鼠",抓住"鼠"并稍作停留后,"猫"抓着"鼠"沿原路返回。"鼠""猫"距起点的距离 y(m)与时间 x(min)之间的关系如图 2-11-3 所示。

(1)在"猫"追"鼠"的过程中,"猫"的平均速度与"鼠"的平均速度的差是<u>　1　</u>m/min;

(2)求 AB 的函数解析式;

(3)求"猫"从起点出发到返回至起点所用的时间。

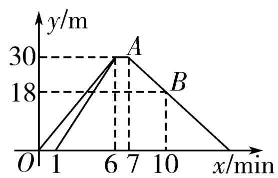


图 2-11-3

解:(2)设 AB 的函数解析式为 $y=kx+b$ $(k\neq0)$,代入 $A(7,30)$,$B(10,18)$,

得$\begin{cases}30=7k+b,\\ 18=10k+b,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-4,\\ b=58,\end{cases}$

$\therefore$ AB 的函数解析式为 $y=-4x+58$。

(3)令 $y=0$,则 $-4x+58=0$,

$\therefore x=14.5$,

$14.5-1=13.5$(min)。

$\therefore$ "猫"从起点出发到返回至起点所用的时间为 13.5 min。

核心素养培优

1. (2023·丽水中考)我市"共富工坊"问海借力,某公司产品销售量得到大幅提升。为促进生产,公司提供了两种付给员工月报酬的方案,如图 2-11-4,员工可以任选一种方案与公司签订合同。看图解答下列问题:

(1)直接写出员工生产多少件产品时，两种方案付给的报酬一样多；

(2)求方案二中 y 关于 x 的函数解析式；

(3)如果你是劳务服务部门的工作人员，你如何指导员工根据自己的生产能力选择方案。

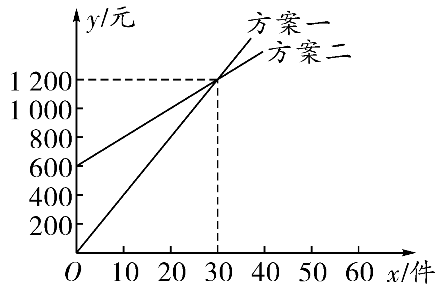


图 2-11-4

解：(1)观察图像得，方案一与方案二相交于点(30,1 200)，

∴ 员工生产 30 件产品时，两种方案付给的报酬一样多。

(2)设方案二的函数解析式为 $y=kx+b$ $(k\neq0)$，

将(0,600)，(30,1 200)代入解析式中，

得$\begin{cases}30k+b=1\ 200,\\ b=600,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=20,\\ b=600,\end{cases}$

即方案二中 y 关于 x 的函数解析式为 $y=20x+600$。

(3)由两种方案的图像交点(30,1 200)可知，

若每月生产产品件数 x 的取值范围为 $0<x<30$，则选择方案二；

若每月生产产品件数 $x=30$，则选择两个方案都可以；

若每月生产产品件数 x 的取值范围为 $x>30$，则选择方案一。

2. (2023 · 永州中考)小明观察到一个水龙头因损坏而不断地向外滴水，为探究其漏水造成的浪费情况，小明用一个带有刻度的量筒放在水龙头下面装水，每隔一分钟记录量筒中的总水量，但由于操作延误，开始计时的时候量筒中已经有少量水，因而得到如下表的一组数据：

时间 t/min	1	2	3	4	5	…
总水量 y/mL	7	12	17	22	27	…

(1)探究：根据上表中的数据，请判断 $y=\frac{k}{t}$ 和 $y=kt+b$(k,b 为常数)哪一个能正确反映总水量 y 与时间 t 的函数关系？并求出 y 关于 t 的解析式；

(2)应用：

①请你估算小明在第 20 分钟测量时量筒的总水量；

②一个人一天大约饮用 1 500 mL 水，请你估算这个水龙头一个月(按 30 天计)的漏水量可供一个人饮用多少天。

解：(1)观察表格，可发现前一分钟比后一分钟少 5 mL 的水，故可得 $y=kt+b$ 能正确反映总水量 y 与时间 t 的函数关系，

把$\begin{cases}t=1,\\ y=7,\end{cases}$$\begin{cases}t=2,\\ y=12,\end{cases}$代入 $y=kt+b$，

可得$\begin{cases}7=k+b,\\ 12=2k+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=5,\\ b=2,\end{cases}$

∴ y 关于 t 的函数解析式为 $y=5t+2$。

(2)①当 $t=20$ 时，$y=5\times20+2=102$，

答：小明在第 20 分钟测量时量筒的总水量是 102 mL。

②由表格可知，每分钟的滴水量为 5 mL，

30 天 $=(30\times24\times60)$ min $=43\ 200$ min，

可供一个人饮水天数为$\frac{43\ 200\times5}{1\ 500}=144$(天)，

答：这个水龙头一个月(按 30 天计)的漏水量可供一个人饮用 144 天。

3. (2023 · 绍兴中考)一条笔直的路上依次有 M，P，N 三地，其中 M，N 两地相距 1 000 m。甲、乙两机器人分别从 M，N 两地

同时出发，去目的地 N，M，匀速而行。如图 2-11-5 中 OA，BC 分别表示甲、乙机器人离 M 地的距离 y(m) 与行走时间 x(min) 的函数关系图像。

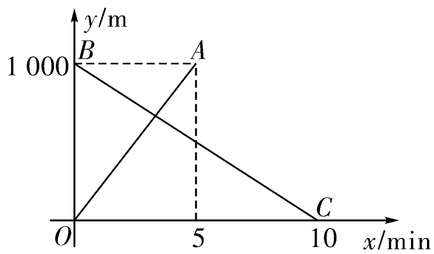


图 2-11-5

(1) 求 OA 所在直线的解析式；

(2) 出发后甲机器人行走多长时间与乙机器人相遇？

(3) 甲机器人到 P 地后，再经过 1 min 乙机器人也到 P 地，求 P，M 两地间的距离。

解：(1) 设 OA 所在直线的解析式为 $y=kx(k\neq0)$，将 $A(5,1\ 000)$ 代入 $y=kx$ 中，得 $k=200$，

$\therefore$ OA 所在直线的解析式为 $y=200x$。

(2) 设 BC 所在直线的解析式为 $y=k'x+b(k'\neq0)$，

将 $B(0,1\ 000)$，$C(10,0)$ 代入得，

$\begin{cases}1\ 000=0+b,\\0=10k'+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k'=-100,\\b=1\ 000,\end{cases}$

$\therefore$ BC 所在直线的解析式为 $y=-100x+1\ 000$。

当甲、乙机器人相遇时，即 $200x=-100x+1\ 000$，解得 $x=\dfrac{10}{3}$，

$\therefore$ 出发后甲机器人行走 $\dfrac{10}{3}$ min 与乙机器人相遇。

(3) 设甲机器人行走 t min 时到 P 地，P 地与 M 地的距离为 $y=200t$，

则乙机器人 $(t+1)$ min 后到 P 地，P 地与 M 地的距离为 $y=-100(t+1)+1\ 000$，

$\therefore 200t=-100(t+1)+1\ 000$，解得 $t=3$，

$\therefore y=600$。

答：P，M 两地间的距离为 600 m。

4. (2023·荆州中考) 荆州古城旁“荆街”某商铺打算购进 A，B 两种文创饰品对游客销售。已知 1 400 元采购 A 种的件数是 630 元采购 B 种件数的 2 倍，A 种的进价比 B 种的进价每件多 1 元，两种饰品的售价均为每件 15 元。计划采购这两种饰品共 600 件，采购 B 种的件数不低于 390 件，不超过 A 种件数的 4 倍。

(1) 求 A，B 两种饰品每件的进价分别为多少元；

(2) 若采购这两种饰品只有一种情况可优惠，即一次性采购 A 种超过 150 件时，A 种超过的部分按进价打六折。设购进 A 种饰品 x 件。

①求 x 的取值范围；

②设计能让这次采购的饰品获利最大的方案，并求出最大利润。

解：(1) 设 A 种饰品每件的进价为 a 元，则 B 种饰品每件的进价为 $(a-1)$ 元，

由题意得 $\dfrac{1\ 400}{a}=\dfrac{630}{a-1}\times2$，

解得 $a=10$，

经检验，$a=10$ 是所列方程的解，且符合题意，

$a-1=9$。

答：A 种饰品每件的进价为 10 元，B 种饰品每件的进价为 9 元。

(2) ①由题意得 $\begin{cases}600-x\geqslant390,\\600-x\leqslant4x,\end{cases}$

解得 $120\leqslant x\leqslant210$，

$\therefore$ 购进 A 种饰品件数 x 的取值范围为 $120\leqslant x\leqslant210$，且 x 为整数；

②设采购 A 种饰品 x 件时的总利润为 w 元，

当 $120\leqslant x\leqslant150$ 时，$w=15\times600-10x-9(600-x)=-x+3\ 600$。

$\because -1<0$，

$\therefore w$ 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x=120$ 时，w 有最大值，最大值是 $-120+3\ 600=3\ 480$；

当 $150<x\leqslant210$ 时，$w=15\times600-[10\times150+10\times60\%(x-150)]-9(600-x)=3x+3\ 000$。

$\because 3>0$，

$\therefore w$ 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x=210$ 时，w 有最大值，最大值是 $3\times210+3\ 000=3\ 630$。

$\because 3\ 630>3\ 480$，

$\therefore w$ 的最大值是 3 630，此时 $600-x=600-210=390$。

即当采购 A 种饰品 210 件，B 种饰品 390 件时，商铺获利最大，最大利润为 3 630元。

5.（2023·新疆中考）随着端午节的临近，A，B 两家超市开展促销活动，各自推出不同的购物优惠方案，如下表：

超市	A 超市	B 超市
优惠方案	所有商品按八折出售	购物金额每满 100 元返 30 元

（1）当购物金额为 80 元时，选择 __A__ 超市（填“A”或“B”）更省钱；

当购物金额为 130 元时，选择 __B__ 超市（填“A”或“B”）更省钱；

（2）若购物金额为 $x(0\leqslant x<200)$ 元时，请分别写出它们的实付金额 y（元）与购物金额 x（元）之间的函数解析式，并说明促销期间如何选择这两家超市去购物更省钱？

（3）对于 A 超市的优惠方案，随着购物金额的增大，顾客享受的优惠率不变，均为 20%。若在 B 超市购物，购物金额越大，享受的优惠率一定越大吗？请举例说明。

（注：优惠率 $=\dfrac{\text{购物金额}-\text{实付金额}}{\text{购物金额}}\times100\%$）

解：（1）$\because 80<100$，

$\therefore$ A 超市八折优惠，B 超市不优惠，

$\therefore$ 选择 A 超市更省钱。

$\because 100<130<200$，

$\therefore$ A 超市应付：$130\times0.8=104$（元），B 超市应付：$130-30=100$（元）。

$\because 104>100$，

$\therefore$ 选择 B 超市更省钱。

故答案为 A；B。

（2）由题意得 $y_A=0.8x(0\leqslant x<200)$，

$$y_B=\begin{cases}x(0\leqslant x<100),\\x-30(100\leqslant x<200)。\end{cases}$$

当 $0\leqslant x<100$ 时，$0.8x<x$，

$\therefore$ 选择 A 超市省钱。

当 $100\leqslant x<200$ 时，$0.8x<x-30$，即 $x>150$ 时，选择 A 超市更省钱；

当 $0.8x=x-30$，即 $x=150$ 时，A，B 两超市花费一样多；

当 $0.8x>x-30$，即 $x<150$ 时，选择 B 超市更省钱。

综上所述：当 $0\leqslant x<100$ 或 $150<x<200$ 时，选择 A 超市更省钱；当 $x=150$ 时，A，B 两超市花费一样多；当 $100\leqslant x<150$ 时，选择 B 超市更省钱。

（3）在 B 超市购物，购物金额越大，享受的优惠率不一定越大。

说明：当在 B 超市购买 100 元时，返 30 元，相当于打七折，即优惠率为 $\dfrac{100-70}{100}\times100\%=30\%$，当在 B 超市购物 120 元时，返 30 元，则优惠率为 $\dfrac{120-90}{120}\times100\%=25\%$，

$\therefore$ 在 B 超市购物，购物金额越大，享受的优惠率不一定越大。

第 12 讲　反比例函数

重难点突破

重点 1　反比例函数的图像与性质

1. 用描点法画反比例函数图像时的注意事项：(1)列表对称取数，便于发现图像的中心对称性；(2)连线时顺次连接；(3)曲线与坐标轴可以无限接近，但没有交点。

2. 反比例函数的性质中，强调每个象限内，不在同一象限无法直接用增减性进行判断，这是易错点，可以利用数形结合法和特殊值法解答比较函数值大小的问题。

重点 2　反比例函数中变量值的大小比较

对于反比例函数的图像上各点的变量值大小比较问题，需要分象限判断，同一象限看增减性，不同象限看变量值与 0 的关系；还可借助数形结合思想，把已知点画在图像上进行比较。

例：若点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 都是反比例函数 $y=-\dfrac{1}{x}$ 的图像上的点，并且 $x_1<0<x_2<x_3$，比较 y_1, y_2, y_3 的大小。

方法一：用图像解法，作出函数 $y=-\dfrac{1}{x}$ 的草图，画出三点的大致位置，观察图像，可得 $y_2<y_3<y_1$。

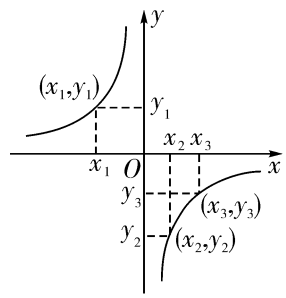
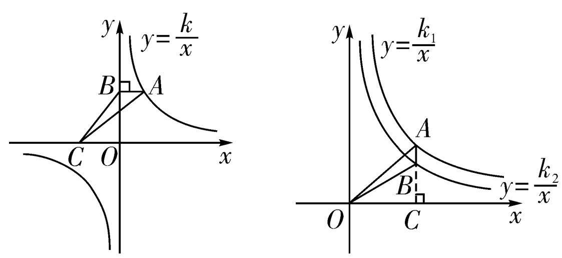


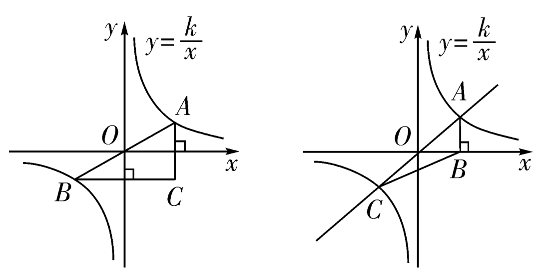
图 2-12-1

方法二：将三个点的横坐标直接代入反比例函数表达式中，得 $y_1=-\dfrac{1}{x_1}$，$y_2=-\dfrac{1}{x_2}$，$y_3=-\dfrac{1}{x_3}$，由于 $x_1<0<x_2<x_3$，所以 $y_2<y_3<y_1$。

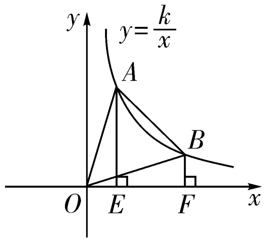
重点 3　与 k 的几何意义相关的常见图形模型(见图 2-12-2)



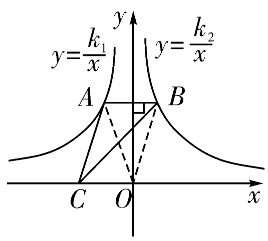
$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|k|$　　$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|k_1-k_2|$



$S_{\triangle ABC}=2|k|$　　$S_{\triangle ABC}=|k|$



$S_{\triangle OAB}=S_{梯形AEFB}$



$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|k_1|+\frac{1}{2}|k_2|$

图 2-12-2

难点 反比例函数与一次函数图像的交点问题

一次函数与反比例函数图像的交点个数问题，类比于两条直线求交点问题，联立两个函数关系式，并利用消元法，把方程组转化为一元二次方程的解的个数问题，同时方程组的解就是两种函数图像的交点横（纵）坐标。特别地，正比例函数与反比例函数图像的交点还具有中心对称性。

经典试题解析

知识点 1 反比例函数的图像及性质

例 1 （2023 · 天津中考）若点 $A(x_1,-2)$，$B(x_2,1)$，$C(x_3,2)$都在反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$的图像上，则 x_1,x_2,x_3 的大小是（　　）

A. $x_3<x_2<x_1$　　B. $x_2<x_1<x_3$

C. $x_1<x_3<x_2$　　D. $x_2<x_3<x_1$

思路分析 利用反比例函数的图像和性质判断即可。

解答 ∵ 反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$中，$-2<0$，

∴ 双曲线在第二、四象限，在每一象限内，y 随 x 的增大而增大。

∵ $A(x_1,-2)$，$B(x_2,1)$，$C(x_3,2)$，

∴ $x_1>0$，$x_2<x_3<0$，

∴ $x_2<x_3<x_1$。

故选 D。

知识点 2 用待定系数法求反比例函数的解析式

例 2 如图 2-12-3，若双曲线 $y=\frac{k}{x}$与边长为 5 的等边三角形 AOB 的边 OA，AB 分别相交于 C，D 两点，且 $OC=3BD$，则 k 的值为________。

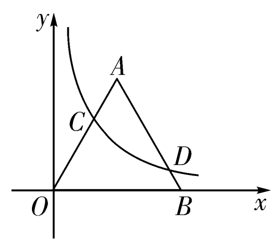


图 2-12-3

思路分析 过点 C 作 $CE\perp x$ 轴，垂足为点 E，过点 D 作 $DF\perp x$ 轴，垂足为点 F，设 $OC=3x$，则 $BD=x$，用含 x 的式子表示出点 C、点 D 的坐标，代入函数解析式，继而可根据 k 建立方程，解出 x 的值后即可得出 k 的值。

解答 过点 C 作 $CE\perp x$ 轴，垂足为点 E，过点 D 作 $DF\perp x$ 轴，垂足为点 F。

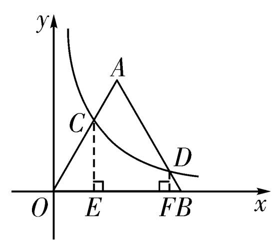


图 2-12-4

设 $OC=3x$，则 $BD=x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCE$ 中，$\angle COE=60°$，

$\therefore OE=\frac{3}{2}x, CE=\frac{3\sqrt{3}}{2}x$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为$\left(\frac{3}{2}x, \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)$。

在 Rt△BDF 中，$BD=x$，$\angle DBF=60^\circ$，

$\therefore BF=\frac{1}{2}x, DF=\frac{\sqrt{3}}{2}x$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为$\left(5-\frac{1}{2}x, \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$,

将 $C\left(\frac{3}{2}x, \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)$代入反比例函数解析式，得 $k=\frac{9\sqrt{3}}{4}x^2$。

将 $D\left(5-\frac{1}{2}x, \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$代入反比例函数解析式，得 $k=\frac{5\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$,

则$\frac{9\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{5\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$,

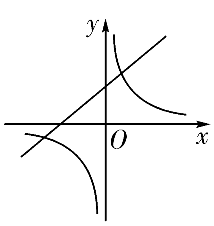
解得 $x_1=1$，$x_2=0$（舍去），

故 $k=\frac{9\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$。

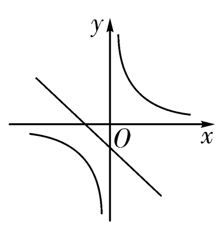
故答案为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$。

知识点 3　反比例函数与其他函数的图像问题

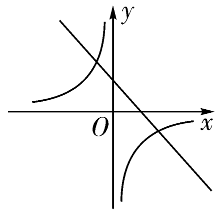
例 3　在同一平面直角坐标系中，函数 $y=mx+m$ 与 $y=\frac{m}{x}(m\neq0)$的图像可能是　　（　　）



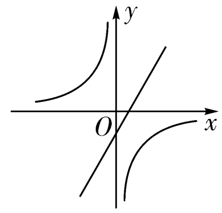
A



B



C



D

思路分析　先根据一次函数的性质判断出 m 的取值，再根据反比例函数的性质判断出 m 的取值，两者一致的即为正确答案。

解答　A. 由函数 $y=mx+m$ 的图像可知 $m>0$，由函数 $y=\frac{m}{x}$的图像可知 $m>0$，故本选项正确；

B. 由函数 $y=mx+m$ 的图像可知 $m<0$，由函数 $y=\frac{m}{x}$的图像可知 $m>0$，矛盾，故本选项错误；

C. 由函数 $y=mx+m$ 的图像可知 y 随 x 的增大而减小，则 $m<0$，而该直线与 y 轴交于正半轴，则 $m>0$，矛盾，故本选项错误；

D. 由函数 $y=mx+m$ 的图像可知 y 随 x 的增大而增大，则 $m>0$，而该直线与 y 轴交于负半轴，则 $m<0$，矛盾，故本选项错误。

故选 A。

知识点 4　反比例函数 k 的几何意义

例 4　如图 2-12-5，Rt△AOB 的一条直角边 OB 在 x 轴上，双曲线 $y=\frac{k}{x}(x>0)$通过斜边 OA 的中点 C，与另一直角边交于点 D。若 $S_{\triangle OCD}=9$，则 $S_{\triangle OBD}$的值为________。

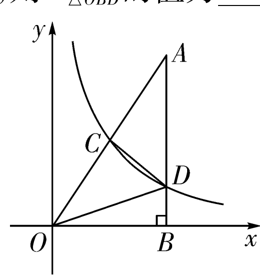


图 2-12-5

思路分析　过 C 点作 $CE\perp x$ 轴，证明

$\triangle OEC \backsim \triangle OBA$，利用相似三角形的性质表示出$\triangle AOB$和$\triangle BOD$的面积，即可得到关于$k$的方程，从而得出答案。

解答 如图2-12-6，过C点作$CE \perp x$轴，垂足为E。

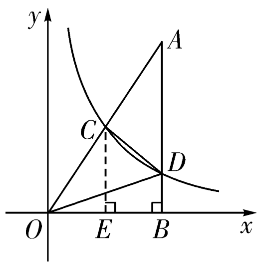


图2-12-6

$\because$ 在$Rt\triangle OAB$中，$\angle OBA = 90°$，

$\therefore CE /\!/ AB$。

$\because$ 点C为$Rt\triangle OAB$斜边OA的中点，

$\therefore CE$为$Rt\triangle OAB$的中位线，

$\therefore \triangle OEC \backsim \triangle OBA$，

$\therefore \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{1}{2}$。

$\because$ 双曲线的解析式为$y = \dfrac{k}{x}(x > 0)$，

$\therefore S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COE} = \dfrac{1}{2}k$，

$\therefore S_{\triangle AOB} = 4S_{\triangle COE} = 2k$，

由$S_{\triangle AOB} - S_{\triangle BOD} = S_{\triangle OAD} = 2S_{\triangle DOC} = 18$，

得$2k - \dfrac{1}{2}k = 18$，解得$k = 12$，

$\therefore S_{\triangle BOD} = \dfrac{1}{2}k = 6$。

故答案为6。

知识点5　反比例函数与一次函数图像的交点问题

例5 如图2-12-7，已知$A\left(-4, \dfrac{1}{2}\right)$，$B(-1, 2)$是一次函数$y = kx + b$与反比例函数$y = \dfrac{m}{x}(m \neq 0, m < 0)$图像的两个交点，$AC \perp x$轴，垂足为$C$，$BD \perp y$轴，垂足为$D$。

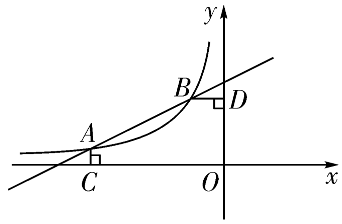


图2-12-7

(1)根据图像直接回答：在第二象限内，当x取何值时，一次函数大于反比例函数的值？

(2)求一次函数的解析式及m的值；

(3)P是线段AB上的一点，连接PC，PD，若$\triangle PCA$和$\triangle PDB$面积相等，求点P的坐标。

思路分析 (1)根据一次函数图像在反比例图像上方时，一次函数值大于反比例函数的函数值，观察图像可得答案；

(2)根据待定系数法可得函数解析式及m的值；

(3)根据三角形面积相等列方程，可得答案。

解 (1)由图像得，在第二象限内，一次函数图像在反比例函数图像上方的部分所对应的x的取值范围为$-4 < x < -1$。

当$-4 < x < -1$时，一次函数大于反比例函数的值。

(2)$\because$ 一次函数的图像过点$\left(-4, \dfrac{1}{2}\right)$，$(-1, 2)$，则

$\begin{cases} -4k + b = \dfrac{1}{2}, \\ -k + b = 2, \end{cases}$解得$\begin{cases} k = \dfrac{1}{2}, \\ b = \dfrac{5}{2}, \end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的解析式为$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$。

$\because$ 反比例函数$y = \dfrac{m}{x}$的图像过点$B(-1, 2)$，

$\therefore m = -1 \times 2 = -2$。

(3)连接PC，PD，如图2-12-8。

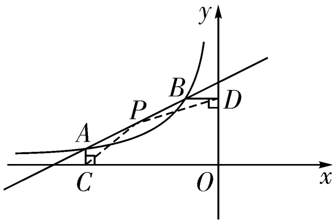


图 2-12-8

设 $P\left(x,\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)$，

由△PCA 和△PDB 面积相等得

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(x+4)=\frac{1}{2}\times|-1|\times\left(2-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)$，

解得 $x=-\frac{5}{2}$，

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=\frac{5}{4}$，

$\therefore$ 点 P 的坐标是$\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right)$。

陕西中考链接

1. (2023・陕西中考)如图 2-12-9，在矩形 $OABC$ 和正方形 $CDEF$ 中，点 A 在 y 轴正半轴上，点 C,F 均在 x 轴正半轴上，点 D 在边 BC 上，$BC=2CD$,$AB=3$。若点 B,E 在同一个反比例函数的图像上，则这个反比例函数的表达式是 $\underline{\quad y=\frac{18}{x}\quad}$。

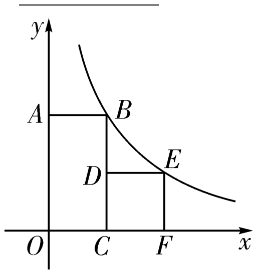


图 2-12-9

2. (2022・陕西中考)已知点 $A(-2,m)$ 在一个反比例函数的图像上，点 A'与点 A 关于 y 轴对称。若点 A'在正比例函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的图像上，则这个反比例函数的表达式为 $\underline{\quad y=-\frac{2}{x}\quad}$。

3. (2021・陕西中考)若 $A(1,y_1)$,$B(3,y_2)$是反比例函数 $y=\frac{2m-1}{x}\left(m<\frac{1}{2}\right)$图像上的两点，则 y_1,y_2 的大小关系是 y_1 $\underline{\quad<\quad}$ y_2。(填“>”“=”或“<”)

4. (2020・陕西中考)在平面直角坐标系中，点 $A(-2,1)$,$B(3,2)$,$C(-6,m)$分别在三个不同的象限。若反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$的图像经过其中两点，则 m 的值为 $\underline{\quad-1\quad}$。

核心素养培优

1. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$的图像经过点(2,3)，那么下列四个点中，也在这个函数图像上的是 (B)

A. $(-6,1)$　　B. $(1,6)$

C. $(2, -3)$　　　　D. $(3, -2)$

2. (2023 · 丽水中考)若 100 N 的压力 F 作用于物体上,产生的压强 p 要大于 1 000 Pa,则下列关于物体受力面积 $S(\mathrm{m}^2)$ 的说法正确的是　(　A　)

A. S 小于 $0.1\ \mathrm{m}^2$　　B. S 大于 $0.1\ \mathrm{m}^2$

C. S 小于 $10\ \mathrm{m}^2$　　D. S 大于 $10\ \mathrm{m}^2$

3. (2023 · 宁波中考)如图 2-12-10,一次函数 $y_1 = k_1x + b(k_1 > 0)$ 的图像与反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}(k_2 > 0)$ 的图像相交于 A,B 两点,点 A 的横坐标为 1,点 B 的横坐标为 -2,当 $y_1 < y_2$ 时,x 的取值范围是　(　B　)

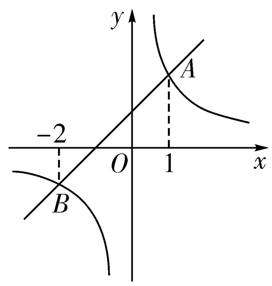


图 2-12-10

A. $x < -2$ 或 $x > 1$

B. $x < -2$ 或 $0 < x < 1$

C. $-2 < x < 0$ 或 $x > 1$

D. $-2 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$

4. (2023 · 宜昌中考)某反比例函数图像上四个点的坐标分别为 $(-3, y_1)$,$(-2, 3)$,$(1, y_2)$,$(2, y_3)$,则 y_1,y_2,y_3 的大小关系为　(　C　)

A. $y_2 < y_1 < y_3$　　B. $y_3 < y_2 < y_1$

C. $y_2 < y_3 < y_1$　　D. $y_1 < y_3 < y_2$

5. (2023 · 武汉中考)关于反比例函数 $y = \frac{3}{x}$,下列结论正确的是　(　C　)

A. 图像位于第二、四象限

B. 图像与坐标轴有公共点

C. 图像所在的每一个象限内,y 随 x 的增大而减小

D. 图像经过点 $(a, a+2)$,则 $a = 1$

6. (2023 · 张家界中考)如图 2-12-11,矩形 $OABC$ 的顶点 A,C 分别在 y 轴、x 轴的正半轴上,点 D 在 AB 上,且 $AD = \frac{1}{4}AB$,反比例函数 $y = \frac{k}{x}(k > 0)$ 的图像经过点 D 及矩形 $OABC$ 的对称中心 M,连接 OD,OM,DM。若 $\triangle ODM$ 的面积为 3,则 k 的值为　(　C　)

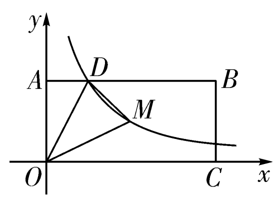


图 2-12-11

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

7. 如图 2-12-12,菱形 $OABC$ 的顶点 O 是原点,顶点 B 在 y 轴上,菱形的两条对角线的长分别是 6 和 4,反比例函数 $y = \frac{k}{x}(x < 0)$ 的图像通过点 C,则 k 的值为 <u>　-6　</u>。

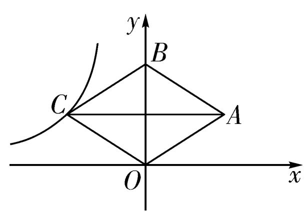


图 2-12-12

8. 如图 2-12-13,四边形 $OABC$ 是矩形,$ADEF$ 是正方形,点 A,D 在 x 轴的正半轴上,点 C 在 y 轴的正半轴上,点 F 在 AB 上,点 B,E 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上,$OA = 1$,$OC = 6$,则正方形 $ADEF$ 的边长为 <u>　2　</u>。

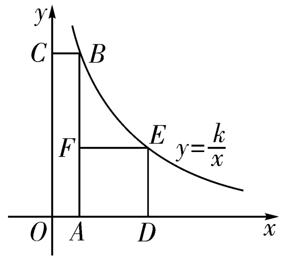


图 2-12-13

9. (2023·连云港中考)如图 2-12-14,矩形 $OABC$ 的顶点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x<0)$ 的图像上,顶点 B,C 在第一象限,对角线 $AC // x$ 轴,交 y 轴于点 D。若矩形 $OABC$ 的面积是 6,$\cos\angle OAC=\frac{2}{3}$,则 $k=$ __$-\frac{8}{3}$__。

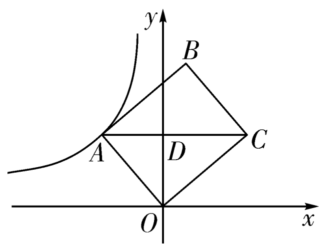


图 2-12-14

10. (2023·广西中考改编)如图 2-12-15,过 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像上点 A,分别作 x 轴,y 轴的平行线交 $y=-\frac{1}{x}$ 的图像于 B,D 两点,以 AB,AD 为邻边的矩形 $ABCD$ 被坐标轴分割成四个小矩形,面积分别记为 S_1,S_2,S_3,S_4。若 $S_2+S_3+S_4=\frac{5}{2}$,则 k 的值为__2__。

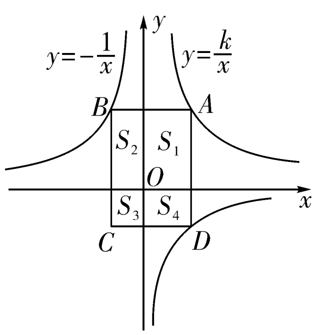


图 2-12-15

11. (2023·济宁中考)如图 2-12-16,正比例函数 $y_1=\frac{1}{2}x$ 和反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像交于点 $A(m,2)$。

(1)求反比例函数的解析式;

(2)将直线 OA 向上平移 3 个单位长度后,与 y 轴交于点 B,与 $y_2=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像交于点 C,连接 AB,AC,求△ABC 的面积。

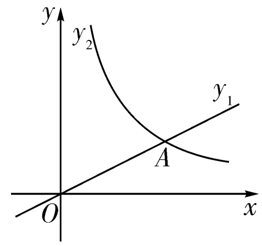


图 2-12-16

解:(1)把 $A(m,2)$ 代入 $y_1=\frac{1}{2}x$ 中,$\frac{1}{2}m=2$,解得 $m=4$,∴ $A(4,2)$。

把 $A(4,2)$ 代入 $y_2=\frac{k}{x}(x>0)$ 中,$\frac{k}{4}=2$,解得 $k=8$,

∴ 反比例函数的解析式为 $y_2=\frac{8}{x}$。

(2)将直线 OA 向上平移 3 个单位长度后,得到的直线 BC 的函数解析式为 $y=\frac{1}{2}x+3$,

当 $x=0$ 时,$y=3$,

∴ 点 B 的坐标为(0,3)。

设直线 AB 的函数解析式为 $y_{AB}=mx+n$,

将 $A(4,2)$,$B(0,3)$ 代入可得 $\begin{cases}4m+n=2,\\ n=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{1}{4},\\ n=3,\end{cases}$

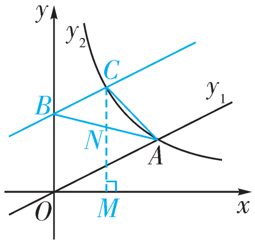
∴ 直线 AB 的函数解析式为 $y_{AB}=-\frac{1}{4}x+3$。

联立方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+3,\\ y=\frac{8}{x},\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=-8,\\y_1=-1,\end{cases}\begin{cases}x_2=2,\\y_2=4,\end{cases}$

$\therefore$ 点 C 的坐标为$(2,4)$。

如图,过点 C 作 $CM\perp x$ 轴,交 AB 于点 N,



在 $y_{AB}=-\frac{1}{4}x+3$ 中,当 $x=2$ 时,$y=\frac{5}{2}$,

$\therefore$ 点 N 的坐标为$\left(2,\frac{5}{2}\right)$,

$\therefore CN=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times4=3$。

第 13 讲 二次函数

重难点突破

重点 1 二次函数的图像与性质

二次函数的解析式中,a 决定抛物线的形状和开口方向,h,k 仅决定抛物线的位置。若两个二次函数的图像形状完全相同且开口方向相同,则它们的二次项系数 a 必相等。

重点 2 确定二次函数的解析式

用待定系数法可求出二次函数的解析式,确定二次函数的解析式一般需要三个独立条件,根据不同条件选择不同的设法:

(1)设一般式:$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,若已知条件是图像上的三个点,则设所求二次函数为 $y=ax^2+bx+c$,将已知条件代入解析式,得到关于 a,b,c 的三元一次方程组,解方程组求出 a,b,c 的值,代入解析式即可。

(2)设顶点式:$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$,若已知二次函数图像的顶点坐标或对称轴与最大值(或最小值),设所求二次函数为 $y=a(x-h)^2+k$,将已知条件代入,求出待定系数 a,最后将顶点式化为一般式。

(3)设交点式:$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$,若已知二次函数图像与 x 轴的两个交点的坐标为$(x_1,0)$,$(x_2,0)$,设所求二次函数为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$,将第三个点的坐标(m,n)(其中 m,n 为已知数)或其他已知条件代入,求出待定系数 a,最后将交点式化为一般式。

重点 3 二次函数图像的变换

1. 平移变换

(1)抛物线在平移的过程中,a 的值不发生变化,变化的只是顶点的位置,且与平移方向有关。

(2)抛物线的移动主要看顶点的移动,$y=ax^2$ 的顶点是$(0,0)$,$y=ax^2+k$ 的顶点是$(0,k)$,$y=a(x-h)^2$ 的顶点是$(h,0)$,$y=a(x-h)^2+k$ 的顶点是(h,k)。我们只需在坐标系中画出这几个顶点,即可轻松地看出平移的方向。

(3)在一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 或

顶点式 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 中，左右平移给 x 加减平移的单位长度，上下平移给等号右边整体加减平移的单位长度。

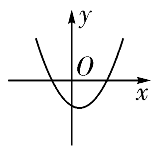
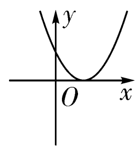
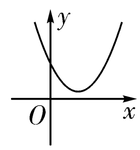
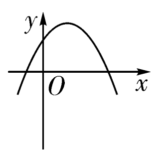
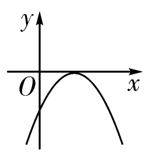
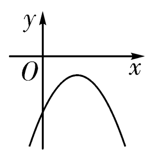
2. 抛物线的对称变换 $(a\neq0)$

(1) 关于 x 轴对称：①$y=ax^2+bx+c$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式为 $y=-ax^2-bx-c$；②$y=a(x-h)^2+k$ 关于 x 轴对称后，得到的解析式为 $y=-a(x-h)^2-k$。

(2) 关于 y 轴对称：①$y=ax^2+bx+c$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式为 $y=ax^2-bx+c$；②$y=a(x-h)^2+k$ 关于 y 轴对称后，得到的解析式为 $y=a(x+h)^2+k$。

(3) 关于原点对称：①$y=ax^2+bx+c$ 关于原点对称后，得到的解析式为 $y=-ax^2+bx-c$；②$y=a(x-h)^2+k$ 关于原点对称后，得到的解析式为 $y=-a(x+h)^2-k$。

重点 4 二次函数与一元二次方程

<table>
<tr><td colspan="2">判别式符号</td><td>$b^2-4ac>0$</td><td>$b^2-4ac=0$</td><td>$b^2-4ac<0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况</td><td>有两个不相等的实数根</td><td>有两个相等的实数根</td><td>没有实数根</td></tr>
<tr><td rowspan="2">二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴的交点情况</td><td>$a>0$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$a<0$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

经典试题解析

知识点 1 二次函数的图像及性质

例 1 （2023·达州中考）如图 2-13-1，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 为常数$)$ 关于直线 $x=1$ 对称。下列五个结论：①$abc>0$；②$2a+b=0$；③$4a+2b+c>0$；④$am^2+bm>a+b$；⑤$3a+c>0$。其中正确的有（　　）

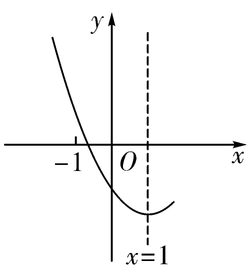


图 2-13-1

A. 4 个　　B. 3 个

C. 2 个　　D. 1 个

思路分析 利用二次函数的图像及性质一一判断即可。

解答 ①∵ 抛物线的开口向上，

∴ $a>0$。

∵ 抛物线与 y 轴交点在 y 轴的负半轴上，

∴ $c<0$。由 $-\dfrac{b}{2a}>0$ 且 $a>0$ 得，$b<0$，

∴ $abc>0$，故①正确；

② 抛物线的对称轴为直线 $x=1$，

$\therefore -\dfrac{b}{2a}=1$，

$\therefore b=-2a$，

$\therefore 2a+b=0$，故②正确；

③由抛物线的对称轴为直线 $x=1$，可知当 $x=2$ 时和 $x=0$ 时的函数值相等，

由图可知 $x=0$ 时，$y<0$，

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$y<0$。

即 $4a+2b+c<0$，故③错误；

④由图知 $x=1$ 时，二次函数有最小值，

$\therefore a+b+c\leqslant am^2+bm+c$，

$\therefore a+b\leqslant am^2+bm$，

故④错误；

⑤由抛物线的对称轴为直线 $x=1$ 可得 $-\dfrac{b}{2a}=1$，

$\therefore b=-2a$。

当 $x=-1$ 时，$y=a+2a+c=3a+c$。

由图知 $x=-1$ 时，$y>0$，

$\therefore 3a+c>0$，

故⑤正确。故选 B。

知识点 2　用待定系数法求二次函数的解析式

例 2　（2023·宁波中考）如图 2-13-2，已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(1,-2)$ 和 $B(0,-5)$。

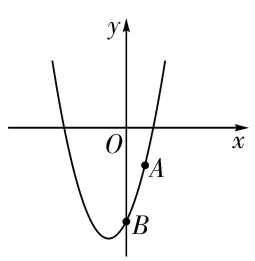


图 2-13-2

（1）求该二次函数的解析式及图像的顶点坐标；

（2）当 $y\leqslant -2$ 时，请根据图像直接写出 x 的取值范围。

思路分析　（1）把 $A(1,-2)$ 和 $B(0,-5)$ 代入 $y=x^2+bx+c$，建立方程组求解即可，再把一般式化为顶点式，可得顶点坐标；

（2）把 $y=-2$ 代入函数解析式求解 x 的值，再利用函数图像可得 $y\leqslant -2$ 时 x 的取值范围。

解　（1）$\because$ 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(1,-2)$ 和 $B(0,-5)$，

$\therefore \begin{cases} c=-5, \\ 1+b+c=-2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=2, \\ c=-5, \end{cases}$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=x^2+2x-5=(x+1)^2-6$，

$\therefore$ 顶点坐标为 $(-1,-6)$。

（2）当 $y=-2$ 时，$(x+1)^2-6=-2$，

$\therefore (x+1)^2=4$，解得 $x_1=1$，$x_2=-3$，

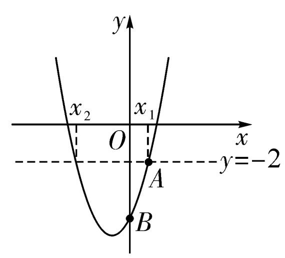


图 2-13-3

如图 2-13-3，当 $y\leqslant -2$ 时，x 的取值范围为 $-3\leqslant x\leqslant 1$。

知识点 3　二次函数图像的平移

例 3　（2023·广西中考）将抛物线 $y=x^2$ 向右平移 3 个单位长度，再向上平移 4 个单位长度，得到的抛物线是　　（　　）

A. $y=(x-3)^2+4$

B. $y=(x+3)^2+4$

C. $y=(x+3)^2-4$

D. $y=(x-3)^2-4$

思路分析　根据“左加右减，上加下减”的法则进行解答即可。

解答 将抛物线 $y=x^2$ 向右平移 3 个单位长度，再向上平移 4 个单位长度，得到的抛物线是 $y=(x-3)^2+4$。

故选 A。

知识点 4 二次函数与一元二次方程的关系

例 4 (2023 · 衡阳中考)已知 $m>n>0$，若关于 x 的方程 $x^2+2x-3-m=0$ 的解为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，关于 x 的方程 $x^2+2x-3-n=0$ 的解为 $x_3,x_4(x_3<x_4)$，则下列结论正确的是 (　　)

A. $x_3<x_1<x_2<x_4$　B. $x_1<x_3<x_4<x_2$

C. $x_1<x_2<x_3<x_4$　D. $x_3<x_4<x_1<x_2$

思路分析 把 x_1,x_2 看作是直线 $y=m$ 与抛物线 $y=x^2+2x-3$ 交点的横坐标；把 x_3,x_4 看作是直线 $y=n$ 与抛物线 $y=x^2+2x-3$ 交点的横坐标，画出对应的函数图像即可得到答案。

解答 如图 2-13-4，设直线 $y=m$ 与抛物线 $y=x^2+2x-3$ 交于 A,B 两点，直线 $y=n$ 与抛物线 $y=x^2+2x-3$ 交于 C,D 两点。

$\because m>n>0$，关于 x 的方程 $x^2+2x-3-m=0$ 的解为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，关于 x 的方程 $x^2+2x-3-n=0$ 的解为 $x_3,x_4(x_3<x_4)$，

$\therefore x_1,x_2,x_3,x_4$ 分别是 A,B,C,D 的横坐标，

$\therefore x_1<x_3<x_4<x_2$。

故选 B。

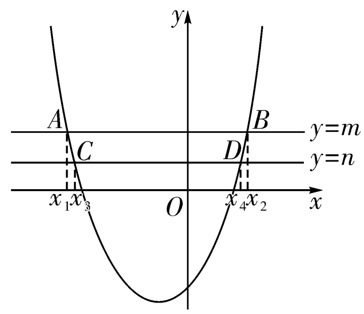


图 2-13-4

陕西中考链接

1. (2023 · 陕西中考)在平面直角坐标系中，二次函数 $y=x^2+mx+m^2-m$(m 为常数)的图像经过点(0,6)，其对称轴在 y 轴左侧，则该二次函数有 (D)

A. 最大值 5　B. 最大值 $\frac{15}{4}$

C. 最小值 5　D. 最小值 $\frac{15}{4}$

2. (2022 · 陕西中考) 已知二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的自变量 x_1,x_2,x_3 对应的函数值分别为 y_1,y_2,y_3。当 $-1<x_1<0,1<x_2<2,x_3>3$ 时，y_1,y_2,y_3 三者之间的大小关系是 (B)

A. $y_1<y_2<y_3$　B. $y_2<y_1<y_3$

C. $y_3<y_1<y_2$　D. $y_2<y_3<y_1$

3. (2021 · 陕西中考) 下表中列出的是一个二次函数的自变量 x 与函数 y 的几组对应值：

x	…	-2	0	1	3	…
y	…	6	-4	-6	-4	…

下列各选项中，正确的是 (C)

A. 这个函数的图像开口向下

B. 这个函数的图像与 x 轴无交点

C. 这个函数的最小值小于 -6

D. 当 $x>1$ 时，y 的值随 x 值的增大而增大

4. (2020 · 陕西中考)在平面直角坐标

系中，将抛物线 $y=x^2-(m-1)x+m(m>1)$ 沿 y 轴向下平移 3 个单位长度，则平移后得到的抛物线的顶点一定在　　（　D　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

核心素养培优

1. (2023・兰州中考) 已知二次函数 $y=-3(x-2)^2-3$，下列说法正确的是（　C　）

A. 对称轴为直线 $x=-2$

B. 顶点坐标为 $(2,3)$

C. 函数的最大值是 -3

D. 函数的最小值是 -3

2. (2023・大连中考) 已知抛物线 $y=x^2-2x-1$，则当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时，函数的最大值为（　D　）

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 2

3. (2023・成都中考) 如图 2-13-5，二次函数 $y=ax^2+x-6$ 的图像与 x 轴交于 $A(-3,0)$，B 两点，下列说法正确的是（　C　）

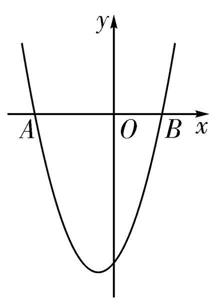


图 2-13-5

A. 抛物线的对称轴为直线 $x=1$

B. 抛物线的顶点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},-6\right)$

C. A，B 两点之间的距离为 5

D. 当 $x<-1$ 时，y 的值随 x 值的增大而增大

4. (2023・东营中考) 如图 2-13-6，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 x 轴交于点 A，B，与 y 轴交于点 C，对称轴为直线 $x=-1$。若点 A 的坐标为 $(-4,0)$，则下列结论正确的是（　C　）

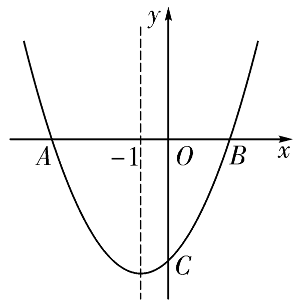


图 2-13-6

A. $2a+b=0$

B. $4a-2b+c>0$

C. $x=2$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的一个根

D. 点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 在抛物线上，当 $x_1>x_2>-1$ 时，$y_1<y_2<0$

5. (2023・广安中考) 如图 2-13-7，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ (a，b，c 为常数，$a\neq 0$) 的图像与 x 轴交于点 $A(-3,0)$，$B(1,0)$。有下列结论：①$abc>0$；②若点 $(-2,y_1)$ 和 $(-0.5,y_2)$ 均在抛物线上，则 $y_1<y_2$；③$5a-b+c=0$；④$4a+c>0$。其中正确的有（　C　）

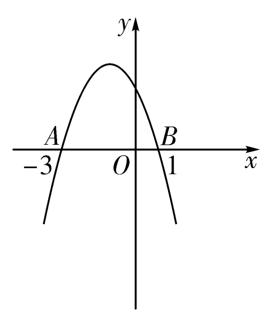


图 2-13-7

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　　　D. 4 个

6. (2023 · 宁波中考)已知二次函数 $y = ax^2 - (3a+1)x + 3(a \neq 0)$,下列说法正确的是　　(C)

A. 点(1,2)在该函数的图像上

B. 当 $a=1$ 且 $-1 \leqslant x \leqslant 3$ 时,$0 \leqslant y \leqslant 8$

C. 该函数的图像与 x 轴一定有交点

D. 当 $a>0$ 时,该函数图像的对称轴一定在直线 $x=\frac{3}{2}$ 的左侧

7. (2023 · 扬州中考)已知二次函数 $y = ax^2 - 2x + \frac{1}{2}$($a$ 为常数,且 $a>0$),下列结论:①函数图像一定经过第一、二、四象限;②函数图像一定不经过第三象限;③当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小;④当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而增大。其中所有正确结论的序号是　　(B)

A. ①②　B. ②③　C. ②　D. ③④

8. (2023 · 陕西名校模拟)二次函数 $y = ax^2 + bx + c$(a,b,c 是实数且 $a \neq 0$)中 x 与 y 的部分对应值如下表,则下列结论:①当 $x < -4$ 时,$y<3$;②当 $x=1$ 时,y 的值为 -13;③$x=-2$ 是方程 $ax^2 + (b-2)x + c - 7 = 0$ 的一个根;④方程 $ax^2 + bx + c = 6$ 有两个不相等的实数根。其中正确的有　　(C)

x	…	-7	-6	-5	-4	-3	-2	…
y	…	-27	-13	-3	3	5	3	…

A. 4 个　　B. 3 个

C. 2 个　　D. 1 个

9. (2023 · 陕西名校模拟)已知二次函数 $y = mx^2 - 2mx + 2(m \neq 0)$ 在 $-2 \leqslant x \leqslant 2$ 时有最小值 -2,则 $m =$ ___4 或 $-\frac{1}{2}$___。

10. (2023 · 陕西名校模拟)把二次函数 $y = x^2 + 4x + m$ 的图像向上平移 1 个单位长度,再向右平移 3 个单位长度,如果平移后所得抛物线与坐标轴有且只有一个公共点,那么 m 应满足的条件为___$m>3$___。

11. (2023 · 绍兴中考)已知二次函数 $y = -x^2 + bx + c$。

(1)当 $b=4, c=3$ 时。

①求该函数图像的顶点坐标;

②当 $-1 \leqslant x \leqslant 3$ 时,求 y 的取值范围。

(2)当 $x \leqslant 0$ 时,y 的最大值为 2;当 $x>0$ 时,y 的最大值为 3,求二次函数的解析式。

解:(1)①当 $b=4, c=3$ 时,$y = -x^2 + 4x + 3 = -(x-2)^2 + 7$,

∴ 顶点坐标为(2,7)。

②∵ 顶点坐标为(2,7),抛物线开口向下,

当 $-1 \leqslant x \leqslant 2$ 时,y 随 x 的增大而增大,

当 $2 \leqslant x \leqslant 3$ 时,y 随 x 的增大而减小,

∴ 当 $x=2$ 时,y 有最大值,最大值为 7。

又 $2-(-1) > 3-2$,

∴ 当 $x=-1$ 时取得最小值,最小值 $y=-2$,

∴ 当 $-1 \leqslant x \leqslant 3$ 时,$-2 \leqslant y \leqslant 7$。

(2)∵ 当 $x \leqslant 0$ 时,y 的最大值为 2;当 $x>0$ 时,y 的最大值为 3,

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{b}{2}$,在 y 轴的右侧,

∴ $b>0$。

∵ 抛物线开口向下,当 $x \leqslant 0$ 时,y 的最大值为 2,

∴ $c=2$。

又∵ $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4 \times (-1) \times 2 - b^2}{4 \times (-1)} = 3$,

∴ $b = \pm 2$。

∵ $b>0$,∴ $b=2$,

∴ 二次函数的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 2$。

第 14 讲 二次函数的综合

重难点突破

重点 1 二次函数与几何图形的综合

常考的设问类型:

(1)线段问题(线段的数量关系,线段长的最值,周长的最值等);

(2)面积问题;

(3)特殊图形存在性问题;

(4)角度的数量关系问题。

温馨提示 二次函数与几何图形结合中常用的结论:(1)水平线段的长度 = |线段端点的横坐标之差|;竖直线段的长度 = |线段端点的纵坐标之差|。

(2)点到坐标轴的距离:点 $M(a,b)$ 到 x 轴的距离为 $|b|$,到 y 轴的距离为 $|a|$。

(3)若已知点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$($x_1>x_2$,$y_1>y_2$),根据勾股定理,可得 $MN=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

重点 2 二次函数的实际应用

1. 几何图形中的面积问题

通常根据题目中的图形面积公式构造关于自变量 x 的二次函数表达式,求面积最值时,把二次函数表达式转化为顶点式,利用二次函数的性质求最值,同时要关注自变量的取值范围。

2. 购买销售问题

利用二次函数求最大利润等问题,常与一次函数、不等式、方程相联系,再结合二次函数的性质求最值。利润问题是购买销售问题中的重点问题,对于这类问题,解题的一般步骤为:(1)设出自变量,用含自变量的代数式表示销售的单价、销售量及销售收入等;(2)用含自变量的代数式表示销售商品的成本;(3)用自变量和含自变量的代数式表示销售利润,即可得到函数表达式;(4)根据函数表达式求出最值及取得最值时的自变量的值。

3. 抛物线形问题

这类问题的情境通常有一个抛物线形的物体,如隧道、桥梁、喷泉等,可以通过构造二次函数模型,利用其表达式解决问题。一般方法是利用数形结合和函数思想,建立合理的平面直角坐标系,设出适当的函数表达式,由已知点所在的位置,利用待定系数法求出未知量,从而得出函数表达式,再由二次函数的性质去分析解决问题。

温馨提示 在实际问题中,自变量的取值范围往往会受到实际条件的限制,此时要注意自变量的取值范围会影响最值的大小。

经典试题解析

知识点 1　二次函数与线段最值问题

例 1　(2023·张家界中考)如图 2-14-1,在平面直角坐标系中,已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像与 x 轴交于点 $A(-2,0)$ 和点 $B(6,0)$ 两点,与 y 轴交于点 $C(0,6)$。点 D 为线段 BC 上的一动点。

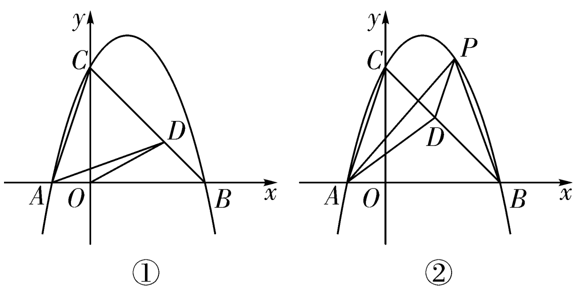


图 2-14-1

(1)求抛物线的解析式;

(2)如图 2-14-1①,求 $\triangle AOD$ 周长的最小值;

(3)如图 2-14-1②,过动点 D 作 $DP/\!/AC$ 交抛物线第一象限部分于点 P,连接 PA,PB,记 $\triangle PAD$ 与 $\triangle PBD$ 的面积和为 S,当 S 取得最大值时,求点 P 的坐标,并求出此时 S 的最大值。

思路分析　(1)根据题意设抛物线的解析式为 $y=a(x+2)(x-6)$,将 $(0,6)$ 代入求解即可;

(2)作点 O 关于线段 BC 的对称点 E,连接 EC,EB,根据点的坐标及正方形的判定得出四边形 $OBEC$ 为正方形,即 $E(6,6)$。连接 AE,交 BC 于点 D,由对称性得 $DO=DE$,此时 $DO+AD$ 有最小值,即为 AE 的长,再由勾股定理求解后即可得到 $\triangle AOD$ 周长的最小值;

(3)由待定系数法确定直线 BC 的解析式为 $y=-x+6$,直线 AC 的解析式为 $y=3x+6$,根据平行线的性质,设直线 PD 的解析式为 $y=3x+n$,设 $P\left(m,-\frac{1}{2}m^2+2m+6\right)$,然后结合图形及面积之间的关系求解即可。

解　(1)由题意可设抛物线的解析式为 $y=a(x+2)(x-6)$,将 $(0,6)$ 代入可得,

$6=-12a$,

$\therefore a=-\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-6)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$。

(2)作点 O 关于线段 BC 的对称点 E,连接 EC,EB。

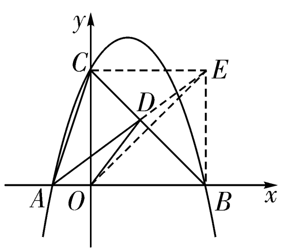


图 2-14-2

$\because B(6,0)$,$C(0,6)$,$\angle BOC=90^\circ$,

$\therefore OB=OC=6$。

$\because O$,E 关于线段 BC 对称,

$\therefore$ 四边形 $OBEC$ 为正方形,

$\therefore E(6,6)$。

连接 AE,交 BC 于点 D,由对称性可知 $DO=DE$,

此时 $DO+AD$ 有最小值，最小值为 AE 的长，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$AB=6-(-2)=8$，$BE=6$，

$\therefore AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$。

$\because \triangle AOD$ 的周长为 $DA+DO+AO$，$AO=2$，$DA+DO$ 的最小值为 10，

$\therefore \triangle AOD$ 周长的最小值为 $10+2=12$。

(3) 已知点 $A(-2,0)$，$B(6,0)$，$C(0,6)$，

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+t(k\neq 0)$，

将 $B(6,0)$，$C(0,6)$ 代入 $y=kx+t$ 中，得 $\begin{cases}6k+t=0,\\ t=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\ t=6,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-x+6$。

同理可得，直线 AC 的解析式为 $y=3x+6$。

$\because PD\parallel AC$，

$\therefore$ 设直线 PD 的解析式为 $y=3x+n$，

由 (1) 设 $P\left(m,-\frac{1}{2}m^2+2m+6\right)$，代入直线 PD 的解析式得，$n=-\frac{1}{2}m^2-m+6$，

$\therefore$ 直线 PD 的解析式为 $y=3x-\frac{1}{2}m^2-m+6$，

联立方程组得 $\begin{cases}y=-x+6,\\ y=3x-\frac{1}{2}m^2-m+6,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{8}m^2+\frac{1}{4}m,\\ y=-\frac{1}{8}m^2-\frac{1}{4}m+6,\end{cases}$

$\therefore D\left(\frac{1}{8}m^2+\frac{1}{4}m,-\frac{1}{8}m^2-\frac{1}{4}m+6\right)$。

$\because P$，D 都在第一象限，

$\therefore S=S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PBD}=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle DAB}=\frac{1}{2}AB\cdot(y_P-y_D)$

$=\frac{1}{2}\times 8\times\left(-\frac{3}{8}m^2+\frac{9}{4}m\right)$

$=-\frac{3}{2}m^2+9m=-\frac{3}{2}(m^2-6m)$

$=-\frac{3}{2}(m-3)^2+\frac{27}{2}$，

$\therefore$ 当 $m=3$ 时，S 取得最大值，此时点 P 的坐标为 $\left(3,\frac{15}{2}\right)$，$S_{最大值}=\frac{27}{2}$。

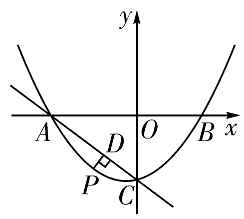
知识点 2 二次函数与特殊三角形

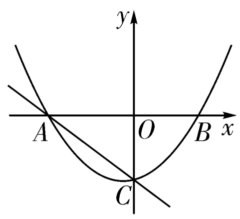
例 2 （2023·重庆中考）如图 2-14-3，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A，B，与 y 轴交于点 C，其中 $B(3,0)$，$C(0,-3)$。

(1) 求该抛物线的解析式；

(2) 点 P 是直线 AC 下方抛物线上一动点，过点 P 作 $PD\perp AC$，垂足为点 D，求 PD 的最大值及此时点 P 的坐标；

(3) 在 (2) 的条件下，将该抛物线向右平移 5 个单位长度，点 E 为点 P 的对应点，平移后的抛物线与 y 轴交于点 F，Q 为平移后的抛物线的对称轴上任意一点。写出所有使得以 QF 为腰的 $\triangle QEF$ 是等腰三角形的点 Q 的坐标。





备用图

图 2-14-3

思路分析 (1)利用待定系数法求抛物线的解析式即可；

(2)求出直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x-3$，过点 P 作 y 轴的平行线交 AC 于点 H，根据锐角三角函数得到 $PD=\frac{4}{5}PH$，设 $H\left(x,-\frac{3}{4}x-3\right)$，则 $P\left(x,\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-3\right)$，进而根据二次函数的性质求解；

(3)用勾股定理分别表示出 EF^2，QE^2，QF^2，分 $QF=QE$，$QF=EF$ 两种情况，列出方程，即可求解。

解 (1)将 $B(3,0)$，$C(0,-3)$代入 $y=\frac{1}{4}x^2+bx+c$，得$\begin{cases}c=-3,\\ \frac{1}{4}\times9+3b+c=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=\frac{1}{4},\\ c=-3,\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-3$。

(2)令$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-3=0$，则 $x=-4$ 或 $x=3$，则 $A(-4,0)$，设直线 AC 的解析式为 $y=kx+t(k\neq0)$，

将 $A(-4,0)$，$C(0,-3)$代入 $y=kx+t$，得$\begin{cases}t=-3,\\ -4k+t=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}t=-3,\\ k=-\frac{3}{4},\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x-3$。

如图 2-14-4，过点 P 作 y 轴的平行线交 AC 于点 H，则 $\angle PHC=\angle ACO$，

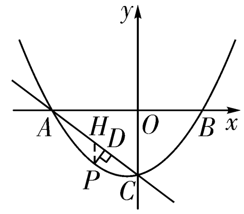


图 2-14-4

$\therefore \tan\angle PHC=\tan\angle ACO=\frac{4}{3}$，

$\therefore \sin\angle PHC=\sin\angle ACO=\frac{4}{5}$，

$\therefore PD=PH\cdot\sin\angle PHC=\frac{4}{5}PH$。

设 $H\left(x,-\frac{3}{4}x-3\right)$，则 $P\left(x,\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-3\right)$，

$$\begin{aligned}\therefore PD&=\frac{4}{5}PH\\&=\frac{4}{5}\left(-\frac{3}{4}x-3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+3\right)\\&=-\frac{1}{5}(x+2)^2+\frac{4}{5}\leqslant\frac{4}{5},\end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $x=-2$ 时，PD 最大，PD 的最大值为$\frac{4}{5}$，此时点 P 的坐标为$\left(-2,-\frac{5}{2}\right)$。

(3)$\because y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-3=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{16}$，

$\therefore$ 平移后的抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}-5\right)^2-\frac{49}{16}=\frac{1}{4}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{49}{16}$，对称轴为直线 $x=\frac{9}{2}$，

点 $P\left(-2,-\frac{5}{2}\right)$向右平移 5 个单位长度得到 $E\left(3,-\frac{5}{2}\right)$。

$\because$ 平移后的抛物线与 y 轴交于点 F，令 $x=0$，则 $y=2$，

$\therefore F(0,2)$，设 $Q\left(\frac{9}{2},m\right)$，

$\therefore QF^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2+(m-2)^2$，$QE^2=\frac{9}{4}+\left(m+\frac{5}{2}\right)^2$，$EF^2=3^2+\left(2+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{117}{4}$。

当 $QF=QE$ 时，则 $\left(\frac{9}{2}\right)^2+(m-2)^2=\frac{9}{4}+\left(m+\frac{5}{2}\right)^2$，

解得 $m=\frac{7}{4}$，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $\left(\frac{9}{2},\frac{7}{4}\right)$；

当 $QF=EF$ 时，则 $\left(\frac{9}{2}\right)^2+(m-2)^2=\frac{117}{4}$，

解得 $m=5$ 或 -1，

则点 Q 的坐标为 $\left(\frac{9}{2},5\right)$ 或 $\left(\frac{9}{2},-1\right)$；

综上，点 Q 的坐标为 $\left(\frac{9}{2},\frac{7}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{9}{2},5\right)$ 或 $\left(\frac{9}{2},-1\right)$。

方法指导 1. 二次函数与直角三角形结合的问题

问题：已知点 A，B 和直线 l，在 l 上求点 P，使△PAB 为直角三角形。

分情况讨论：①以 A 为直角顶点；②以 B 为直角顶点；③以 P 为直角顶点。

即“两线一圆”模型：

情况一：分别过点 A，B 作 AB 的垂线，与直线 l 的交点即为所求作的点 P；

情况二：以 AB 为直径作圆，圆与直线 l 的交点即为所求作的点 P。

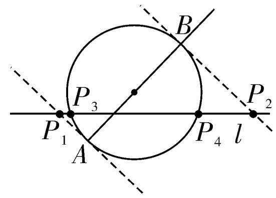


图 2-14-5

2. 二次函数与等腰三角形结合的问题

问题：已知线段 AB，在直线 l 上找一点 P 使得△ABP 为等腰三角形。

分情况讨论：①$AB=AP$；②$AB=BP$；③$AP=BP$。

即“两圆一线”模型：

情况一：以 AB 为腰时，分别以点 A，B 为圆心，AB 长为半径的圆与直线 l 的交点即为所求作的点 P；

情况二：以 AB 为底时，AB 的垂直平分线与直线 l 的交点即为所求作的点 P。

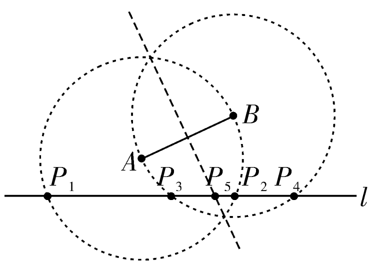


图 2-14-6

知识点 3 二次函数与特殊平行四边形

例 3 （2023·重庆中考）如图 2-14-7，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 过点 $(1,3)$，且交 x 轴于 $A(-1,0)$，B 两点，交 y 轴于点 C。

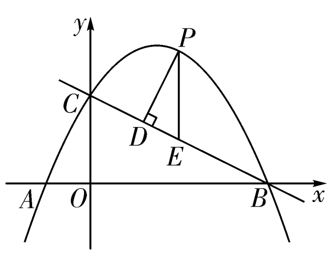


图 2-14-7

(1) 求抛物线的解析式；

(2)点 P 是直线 BC 上方抛物线上的一动点,过点 P 作 $PD\perp BC$,垂足为点 D,过点 P 作 y 轴的平行线交直线 BC 于点 E,求 $\triangle PDE$ 周长的最大值及此时点 P 的坐标;

(3)在(2)中 $\triangle PDE$ 周长取得最大值的条件下,将该抛物线沿射线 CB 方向平移 $\sqrt{5}$ 个单位长度,点 M 为平移后的抛物线的对称轴上一点。在平面内确定一点 N,使得以点 A,P,M,N 为顶点的四边形是菱形,写出所有符合条件的点 N 的坐标,并写出求解点 N 的坐标的其中一种情况的过程。

思路分析 (1)把 $(1,3)$,$A(-1,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+2$ 计算即可;

(2)延长 PE 交 x 轴于 F,证明 $\triangle DPE\backsim\triangle OBC$,根据相似三角形的性质表示出线段 PE 的长,再利用二次函数的性质求 $\triangle PDE$ 周长的最大值即可;

(3)先求出平移后抛物线的解析式,再设出 M,N 的坐标,最后根据菱形的性质和判定分类讨论即可。

解 (1)把 $(1,3)$,$A(-1,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+2$ 得,$\begin{cases}3=a+b+2,\\0=a-b+2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\b=\dfrac{3}{2},\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+2$。

(2)如图 2-14-8,延长 PE 交 x 轴于点 F,

令 $y=0$,即 $-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+2=0$,解得 $x_1=-1$,$x_2=4$。令 $x=0$,则 $y=2$,

$\therefore B(4,0)$,$C(0,2)$,

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$。

又 $BO=4$,$CO=2$,根据勾股定理得 $BC=2\sqrt{5}$。

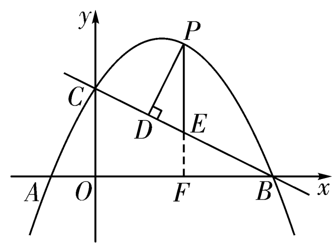


图 2-14-8

$\because$ 过点 P 作 $PD\perp BC$,垂足为点 D,过点 P 作 y 轴的平行线交直线 BC 于点 E,

$\therefore \angle DEP=\angle BCO$,$\angle PDE=\angle COB=90^\circ$,

$\therefore \triangle DPE\backsim\triangle OBC$,

$\therefore \dfrac{DE}{OC}=\dfrac{PD}{BO}=\dfrac{PE}{BC}$,即 $\dfrac{DE}{2}=\dfrac{PD}{4}=\dfrac{PE}{2\sqrt{5}}$,

$\therefore DE=\dfrac{\sqrt{5}}{5}PE$,$PD=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}PE$,

$\therefore \triangle PDE$ 的周长为 $DE+PD+PE=\dfrac{5+3\sqrt{5}}{5}PE$。

设 $P\left(m,-\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{3}{2}m+2\right)$,则 $E\left(m,-\dfrac{1}{2}m+2\right)$,

$\therefore PE=-\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{3}{2}m+2-\left(-\dfrac{1}{2}m+2\right)=-\dfrac{1}{2}m^2+2m=-\dfrac{1}{2}(m-2)^2+2$,

$\therefore$ 当 $m=2$ 时,PE 有最大值,最大值为 2,此时 $P(2,3)$,

$\therefore \triangle PDE$ 周长的最大值为 $2\times$

$\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{5}\right)=\frac{6\sqrt{5}+10}{5}$。

(3)∵将该抛物线沿射线 CB 方向平移 $\sqrt{5}$个单位长度，可以看成是向右平移 2 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，

∴平移后的解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{3}{2}(x-2)+2-1=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-4$，抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{7}{2}$。

已知 $P(2,3)$，$A(-1,0)$，设 $M\left(\frac{7}{2},n\right)$，$N(s,t)$。

①当 AP 为菱形的对角线时，此时以点 A,P,M,N 为顶点的四边形是菱形，

∴ PA 与 MN 互相平分，且 $AM=PM$，

则 $\left(\frac{7}{2}+1\right)^2+n^2=\left(\frac{7}{2}-2\right)^2+(n-3)^2$，

解得 $n=-\frac{3}{2}$，

∴ $M\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$。

∵ PA 的中点坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，$MN$ 的中点坐标为 $\left(\frac{\frac{7}{2}+s}{2},\frac{-\frac{3}{2}+t}{2}\right)$，

∴ $\begin{cases}\frac{7}{2}+s=1,\\-\frac{3}{2}+t=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}s=-\frac{5}{2},\\t=\frac{9}{2},\end{cases}$

此时 $N\left(-\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$；

②当 PA 为菱形的边时，若 $PA=PM$ 且 AM 与 PN 互相平分，

则 $(2+1)^2+3^2=\left(2-\frac{7}{2}\right)^2+(3-n)^2$，

解得 $n=3\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$。

∵ PN 的中点坐标为 $\left(\frac{2+s}{2},\frac{3+t}{2}\right)$，$AM$ 的中点坐标为 $\left(\frac{\frac{7}{2}-1}{2},\frac{n+0}{2}\right)$，

∴ $\begin{cases}2+s=\frac{7}{2}-1,\\3+t=n+0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}s=\frac{1}{2},\\t=\pm\frac{3\sqrt{7}}{2},\end{cases}$

此时 $N\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$ 或 $N\left(\frac{1}{2},-\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$；

若 $PA=AM$ 且 AN 和 PM 互相平分，

则 $(2+1)^2+3^2=\left(\frac{7}{2}+1\right)^2+n^2$，此方程无解。

综上所述，以点 A,P,M,N 为顶点的四边形是菱形时，点 N 的坐标为 $\left(-\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2},-\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$。

方法指导　1. 探究平行四边形存在性问题的方法

(1)已知平面内不共线三定顶点(A,B,C)，求一动顶点(D)，使得 A,B,C,D 组成平行四边形：顺次连接 AB,AC,BC，分别过点 A,B,C 作对边的平行线，三条平行线的交点即为所有点 D；

(2)已知平面内两定顶点(A,C)，求两动顶点(E,F)，使 A,C,E,F 四点组成平行四边形：分 AC 为边和 AC 为对角线两种情况讨论。①AC为平行四边形的边时，平移 AC，利用平行四边形的对边平行且相等确定点 E,F 的位置；②AC 为平行四边形的对角线时，取 AC 的中点，利用平行四边形的对角线互相平

分确定点 E,F 的位置。

2. 探究菱形存在性问题的方法

(1)利用菱形的四条边相等这一性质，通过点的坐标关系，列出方程求顶点坐标；

(2)利用菱形的对角线互相平分且垂直(或两条对角线互为中垂线)这一性质，以交点的坐标为“桥梁”构造直角三角形，利用勾股定理列方程求顶点坐标；

(3)若以点 A,B,C,D 构成菱形，分类讨论：①AB 为边时；②AB 为对角线时。列方程求顶点坐标。

3. 探究矩形存在性问题的方法

(1)将矩形问题转化成直角三角形的问题，利用勾股定理求解；

(2)表示出矩形顶点坐标，利用矩形的对角线相等这一性质列方程求解；也可利用矩形的中心对称性，通过点的坐标关系求解；

(3)若以点 A,B,C,D 构成矩形，分类讨论：①AB 为边时；②AB 为对角线时。列方程求解。

4. 探究正方形存在性问题的方法

(1)根据正方形的一组邻边相等，构造“一线三垂直”的三角形全等，然后得到线段间的等量关系，求解即可；

(2)若以点 A,B,C,D 构成正方形，通常以 AB 为边分类讨论，在 AB 的两侧会有两个正方形，构造全等三角形求点的坐标。

知识点 4 二次函数与三角形相似(全等)

例 4 (2023·随州中考)如图 2-14-9，平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$ 和 $C(0,2)$，连接 BC，点 $P(m,n)(m>0)$ 为抛物线上一动点，过点 P 作 $PN\perp x$ 轴交直线 BC 于点 M，交 x 轴于点 N。

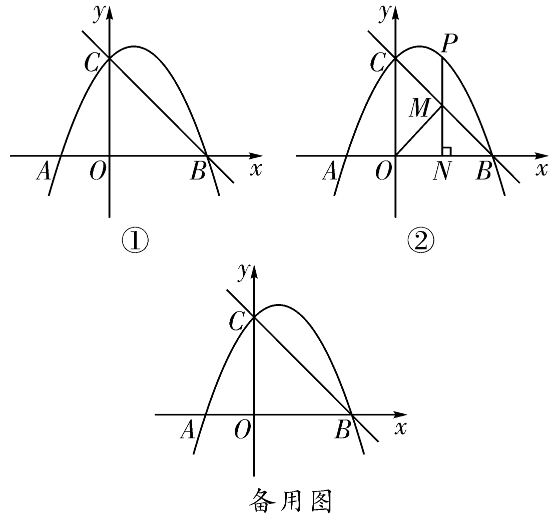


图 2-14-9

(1)直接写出抛物线和直线 BC 的解析式；

(2)如图 2-14-9，连接 OM，当 $\triangle OCM$ 为等腰三角形时，求 m 的值；

(3)当 P 点在运动过程中，在 y 轴上是否存在点 Q，使得以 O,P,Q 为顶点的三角形与以 B,C,N 为顶点的三角形相似(其中点 P 与点 C 相对应)，若存在，直接写出点 P 和点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。

思路分析 (1)设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x-2)$，将点 $C(0,2)$ 代入求 a 的值，进而得到抛物线的解析式；设直线 BC 的解析式为 $y=kx+t$，将点 B,C 的坐标代入求 k,t 的值，进而得到直线 BC 的解析式；

(2)设 $M(m,-m+2)$，分别表示出 OC，OM，CM，对等腰三角形 OCM 中相等的边进行分类讨论，列方程求解即可；

(3)对点 P 在点 B 左侧或右侧进行分类讨论，表示出各线段的长度，利用相似三角形的相似比求解 m，进而可得 P,Q 的坐标。

解 (1)$\because$ 抛物线过点 $A(-1,0)$，

$B(2,0)$，

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x-2)$，

将点 $C(0,2)$ 代入上式，得 $2=-2a$，

$\therefore a=-1$，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-(x+1)(x-2)=-x^2+x+2$。

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+t(k\neq0)$，

将点 $B(2,0)$，$C(0,2)$ 代入上式，

得 $\begin{cases}0=2k+t,\\2=t,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\t=2。\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-x+2$。

(2) $\because$ $PN\perp x$ 轴交直线 BC 于点 M，且 $P(m,n)$，

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(m,-m+2)$，

$\therefore OC=2$，$CM^2=(m-0)^2+(-m+2-2)^2=2m^2$，$OM^2=m^2+(-m+2)^2=2m^2-4m+4$。

当 $\triangle OCM$ 为等腰三角形时，

①若 $CM=OM$，则 $CM^2=OM^2$，即 $2m^2=2m^2-4m+4$，解得 $m=1$。

②若 $CM=OC$，则 $CM^2=OC^2$，即 $2m^2=4$，解得 $m=\sqrt{2}$ 或 $m=-\sqrt{2}$（舍去）。

③若 $OM=OC$，则 $OM^2=OC^2$，即 $2m^2-4m+4=4$，

解得 $m=0$（舍去）或 $m=2$。

综上，$m=1$ 或 $m=\sqrt{2}$ 或 $m=2$。

(3)存在。理由如下：$\because$ 点 P 与点 C 相对应，

$\therefore \triangle POQ\backsim\triangle CBN$ 或 $\triangle POQ\backsim\triangle CNB$。

①若点 P 在点 B 左侧，

则 $\angle CBN=45°$，$BN=2-m$，$CB=2\sqrt{2}$。

如图 2-14-10①，当 $\triangle POQ\backsim\triangle CBN$，即 $\angle POQ=45°$ 时，直线 OP 的解析式为 $y=x$，

$\therefore -m^2+m+2=m$，解得 $m=\sqrt{2}$ 或 $m=-\sqrt{2}$（舍去），

$\therefore OP^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2=4$，得 $OP=2$。

$\because \triangle POQ\backsim\triangle CBN$，

$\therefore \dfrac{OP}{BC}=\dfrac{OQ}{BN}$，即 $\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{OQ}{2-\sqrt{2}}$，

解得 $OQ=\sqrt{2}-1$，

$\therefore P(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$Q(0,\sqrt{2}-1)$。

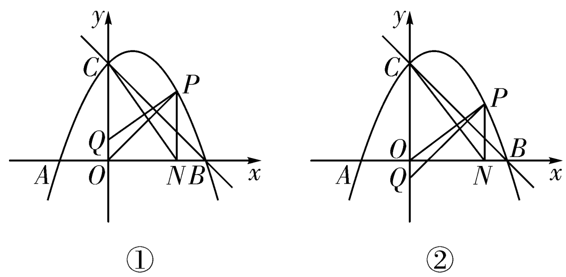


图 2-14-10

如图 2-14-10②，当 $\triangle POQ\backsim\triangle CNB$，即 $\angle PQO=45°$，

当点 Q 在点 P 上方时，$PQ=\sqrt{2}m$，$OQ=-m^2+m+2+m=-m^2+2m+2$。

$\because \triangle POQ\backsim\triangle CNB$，

$\therefore \dfrac{PQ}{CB}=\dfrac{OQ}{NB}$，即 $\dfrac{\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}}=\dfrac{-m^2+2m+2}{2-m}$，

解得 $m=1+\sqrt{5}$（舍去）或 $m=1-\sqrt{5}$（舍去）；

当点 Q 在点 P 下方时，$PQ=\sqrt{2}m$，$OQ=m-(-m^2+m+2)=m^2-2$。

$\because \triangle POQ\backsim\triangle CNB$，

$\therefore \dfrac{PQ}{CB}=\dfrac{OQ}{NB}$，即 $\dfrac{\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}}=\dfrac{m^2-2}{2-m}$，解得 $m=\dfrac{\sqrt{13}+1}{3}$ 或 $m=\dfrac{1-\sqrt{13}}{3}$（舍去），

$\therefore OQ=\dfrac{-4+2\sqrt{13}}{9}$，

$\therefore P\left(\frac{\sqrt{13}+1}{3},\frac{7+\sqrt{13}}{9}\right),Q\left(0,\frac{4-2\sqrt{13}}{9}\right)$。

②若点 P 在点 B 右侧，

则 $\angle CBN=135°,BN=m-2,BC=2\sqrt{2}$。

如图 2-14-11①，当 $\triangle POQ\backsim\triangle CBN$，即 $\angle POQ=135°$时，易得直线 OP 的解析式为 $y=-x$，

$\therefore -m^2+m+2=-m$，解得 $m=1+\sqrt{3}$或 $m=1-\sqrt{3}$（舍去），

$\therefore BN=m-2=1+\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-1,OP=\sqrt{2}m=\sqrt{2}+\sqrt{6}$。

$\because \triangle POQ\backsim\triangle CBN$，

$\therefore \frac{OP}{BC}=\frac{OQ}{BN}$，即$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{OQ}{\sqrt{3}-1}$，

解得 $OQ=1$，

$\therefore P(1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3}),Q(0,1)$。

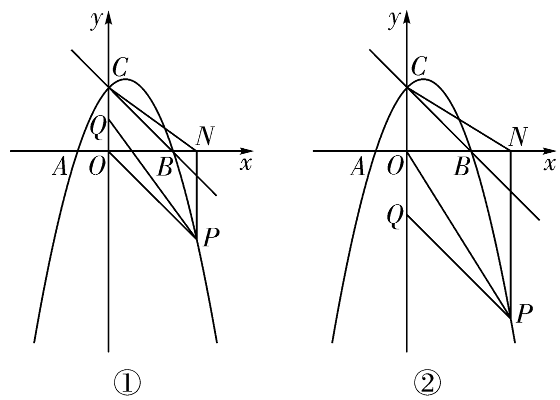


图 2-14-11

如图 2-14-11②，当 $\triangle POQ\backsim\triangle CNB$，即 $\angle PQO=135°$时，

易得 $PQ=\sqrt{2}m,OQ=|-m^2+m+2+m|=m^2-2m-2$。

$\because \triangle POQ\backsim\triangle CNB$，

$\therefore \frac{PQ}{CB}=\frac{OQ}{NB}$，即$\frac{\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}}=\frac{m^2-2m-2}{m-2}$，

解得 $m=1+\sqrt{5}$或 $m=1-\sqrt{5}$（舍去），

$\therefore P(1+\sqrt{5},-3-\sqrt{5}),Q(0,-2)$。

综上，$P(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$Q(0,\sqrt{2}-1)$ 或 $P\left(\frac{\sqrt{13}+1}{3},\frac{7+\sqrt{13}}{9}\right)$，$Q\left(0,\frac{4-2\sqrt{13}}{9}\right)$ 或 $P(1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3}),Q(0,1)$或 $P(1+\sqrt{5},-3-\sqrt{5}),Q(0,-2)$。

方法指导 探究相似三角形存在性问题的方法

（1）当相似关系确定时，设出点的坐标，表示出线段长，根据比例关系求解；

（2）当相似关系不确定时，先确定是否为直角三角形，当三角形是直角三角形时，找对应的直角关系；当三角形是一般三角形时，找隐含的等角关系再求解。

知识点 5 二次函数与图形面积

例 5 （2023·山西中考）如图 2-14-12，二次函数 $y=-x^2+4x$ 的图像与 x 轴的正半轴交于点 A，经过点 A 的直线与该函数图像交于点 $B(1,3)$，与 y 轴交于点 C。

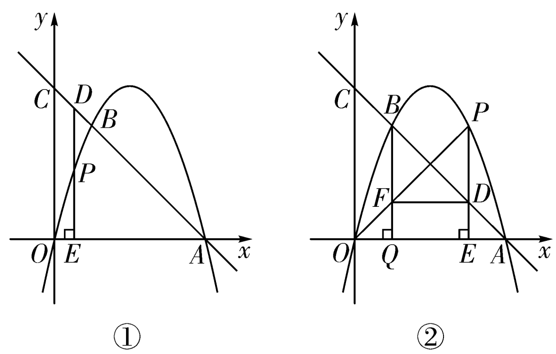


图 2-14-12

（1）求直线 AB 的解析式及点 C 的坐标；

（2）点 P 是第一象限内二次函数图像上的一个动点，过点 P 作直线 $PE\perp x$ 轴，垂足为点 E，与直线 AB 交于点 D，设点 P 的横坐标为 m。

①当 $PD=\frac{1}{2}OC$ 时，求 m 的值；

②当点 P 在直线 AB 上方时，连接 OP，过点 B 作 $BQ\perp x$ 轴，垂足为点 Q，BQ 与 OP 交于点 F，连接 DF。设四边形 $FQED$ 的面积为 S，求 S 关于 m 的函数解析式，并求出 S 的最大值。

思路分析 （1）利用待定系数法求直线 AB 的解析式，再求点 C 的坐标即可；

（2）①分当点 P 在直线 AB 上方和点 P 在直线 AB 下方时两种情况讨论，根据 $PD=2$ 列一元二次方程求解即可；

②证明 $\triangle FOQ\backsim\triangle POE$，得出 $FQ=DE=-m+4$，再证明四边形 $FQED$ 为矩形，利用矩形面积公式得到二次函数的解析式，再利用二次函数的性质即可求解。

解 （1）由 $y=-x^2+4x$ 得，当 $y=0$ 时，$-x^2+4x=0$，

解得 $x_1=0,x_2=4$。

$\because$ 点 A 在 x 轴正半轴上，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(4,0)$。

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，

将 A,B 两点的坐标分别代入 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases}4k+b=0,\\k+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=4,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y=-x+4$。

将 $x=0$ 代入 $y=-x+4$，得 $y=4$，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0,4)$。

（2）①$\because$ 点 P 在第一象限内二次函数 $y=-x^2+4x$ 的图像上，且 $PE\perp x$ 轴，垂足为点 E，与直线 AB 交于点 D，点 P 的横坐标为 m，

$\therefore P(m,-m^2+4m),D(m,-m+4)$。

$\because$ 点 C 的坐标为 $(0,4)$，$\therefore OC=4$。

$\because PD=\dfrac{1}{2}OC$，

$\therefore PD=2$。

如图2-14-13，当点 P 在直线 AB 上方时，$PD=-m^2+4m-(-m+4)=-m^2+5m-4$，

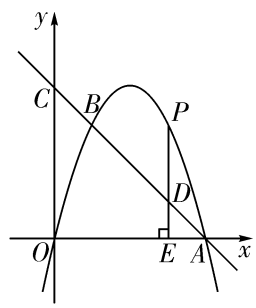


图 2-14-13

$\therefore -m^2+5m-4=2$，

解得 $m_1=2,m_2=3$。

如图2-14-14，当点 P 在直线 AB 下方时，$PD=-m+4-(-m^2+4m)=m^2-5m+4$，

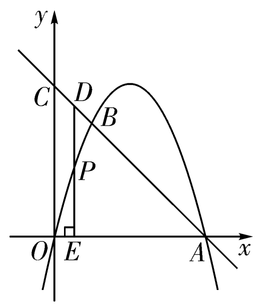


图 2-14-14

$\therefore m^2-5m+4=2$，解得 $m=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$。

$\because 0<m<1$，

$\therefore m=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$。

综上所述，m 的值为 2 或 3 或 $\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$。

②由①得，$OE=m,PE=-m^2+4m,DE=-m+4$。

$\because BQ\perp x$ 轴，垂足为点 Q，交 OP 于点 F，点 B 的坐标为 $(1,3)$，

$\therefore OQ=1$。

$\because$ 点 P 在直线 AB 上方，

$\therefore EQ=m-1$。

$\because PE\perp x$ 轴，垂足为点 E，

$\therefore \angle OQF=\angle OEP=90°$，

$\therefore FQ/\!/DE$，

$\therefore \triangle FOQ\backsim\triangle POE$，

$\therefore \dfrac{FQ}{PE}=\dfrac{OQ}{OE}$，

$\therefore \dfrac{FQ}{-m^2+4m}=\dfrac{1}{m}$，

$\therefore FQ=\dfrac{-m^2+4m}{m}=-m+4$，

$\therefore FQ=DE$，

$\therefore$ 四边形 $FQED$ 为平行四边形。

$\because PE\perp x$ 轴，

$\therefore$ 平行四边形 $FQED$ 为矩形，

$\therefore S=EQ\cdot FQ=(m-1)(-m+4)=-m^2+5m-4=-\left(m-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$，

$\because 1<m<4$，

$\therefore$ 当 $m=\dfrac{5}{2}$ 时，S 的最大值为 $\dfrac{9}{4}$。

方法指导 二次函数与三角形面积相关问题

在平面直角坐标系中涉及图形面积的计算时，先找图形中有无特殊图形，从图形面积的计算公式出发进行计算，所需的线段长度尽量是坐标轴上或平行于坐标轴的线段长度，也可利用铅垂线分割的方法，再利用点的坐标的几何意义，得到线段的长度或表示出线段的长度。常见的有以下 3 种方法：

1. 直接使用公式法：$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot h$。

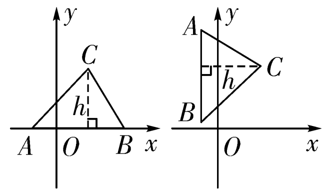


图 2-14-15

2. 分割法：$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ah$。

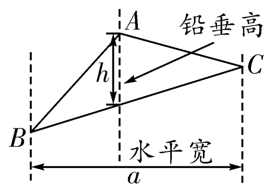


图 2-14-16

3. 补全法：$S_{\triangle ABC}=S_{四边形BDEC}-S_{\triangle ADB}-S_{\triangle AEC}$。

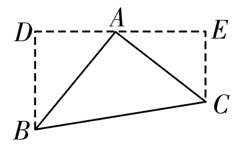


图 2-14-17

知识点 6 二次函数与实际应用

例 6 （2023·广东中考）某批发商以 24 元/箱的进价购进某种蔬菜销往零售超市，已知这种蔬菜的标价为 45 元/箱，实际售价不低于标价的八折。批发商通过分析销售情况，发现这种蔬菜的销售量 y（箱）与当天的售价 x（元/箱）满足一次函数关系，下表是其中的两组对应值。

售价 x/(元/箱)	…	35	38	…
销售量 y/箱	…	130	124	…

（1）若某天这种蔬菜的售价为 42 元/箱，则当天这种蔬菜的销售量为________箱；

（2）该批发商销售这种蔬菜能否在某天获利 1 320 元？若能，请求出当天的销售价；若不能，请说明理由。

(3)批发商搞优惠活动，购买一箱这种蔬菜，赠送成本为6元的土豆，这种蔬菜的售价定为多少时，可使日销售利润最大，最大日销售利润是多少元？

思路分析 (1)用待定系数法求函数解析式，代入售价求解即可；

(2)根据题意列出关于 x 的一元二次方程，解方程求出 x 的值，然后根据这种蔬菜的标价为 45 元/箱，实际售价不低于标价的八折得出 x 的取值范围为 $36\leqslant x\leqslant 45$，从而确定方程的解；

(3)根据“每天的利润 = 单箱的利润 × 销量”列出函数解析式，再根据二次函数的性质求最值。

解 (1)设 y 与 x 之间的函数关系为 $y=kx+b(k\neq 0)$，

根据题意得 $\begin{cases}35k+b=130,\\38k+b=124,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=200,\end{cases}$

$\therefore y=-2x+200$。

当 $x=42$ 时，$y=-2\times 42+200=116$，

$\therefore$ 当天这种蔬菜的销售量为 116 箱。

故答案为 116。

(2)不能。理由如下：根据题意得 $(-2x+200)(x-24)=1\ 320$，

解得 $x_1=34$，$x_2=90$。

$\because$ 这种蔬菜售价不低于 $45\times 0.8=36$，且不高于 45，

$\therefore 36\leqslant x\leqslant 45$，

$\therefore x_1=34$，$x_2=90$ 都不满足题意，

$\therefore$ 该批发商销售这种蔬菜不能在某天获利 1 320 元。

(3)设日销售利润为 w 元，

则 $w=(-2x+200)(x-24-6)=-2(x-65)^2+2\ 450$。

$\because a=-2<0$，

$\therefore$ 抛物线开口向下，

当 $x<65$ 时，w 随 x 的增大而增大。

$\because 36\leqslant x\leqslant 45$，

$\therefore$ 当 $x=45$ 时，$w_{最大}=-2\times(45-65)^2+2\ 450=1\ 650$。

答：这种蔬菜的售价为 45 元时，可使日销售利润最大，最大日销售利润为 1 650 元。

陕西中考链接

1. (2023·陕西中考)某校想将新建图书楼的正门设计为一个抛物线形拱门，并要求所设计的拱门的跨度与拱高之积为 48 m^2，还要兼顾美观、大方、和谐、通畅等因素，设计部门按要求给出了两个设计方案。现把这两个方案中的拱门图形放入平面直角坐标系中，如图 2-14-18 所示：

方案一：抛物线形拱门的跨度 $ON=12$ m，拱高 $PE=4$ m。其中，点 N 在 x 轴上，$PE\perp ON$，$OE=EN$。

方案二：抛物线形拱门的跨度 $ON'=8$ m，拱高 $P'E'=6$ m。其中，点 N' 在 x 轴上，$P'E'\perp ON'$，$OE'=E'N'$。

要在拱门中设置高为 3 m 的矩形框架，

其面积越大越好（框架的粗细忽略不计）。方案一中，矩形框架 $ABCD$ 的面积记为 S_1，点 A,D 在抛物线上，边 BC 在 ON 上；方案二中，矩形框架 $A'B'C'D'$ 的面积记为 S_2，点 A',D' 在抛物线上，边 $B'C'$ 在 ON' 上。现知，小华已正确求出方案二中，当 $A'B'=3$ m 时，$S_2=12\sqrt{2}$ m²，请你根据以上提供的相关信息，解答下列问题：

（1）求方案一中抛物线的函数表达式；

（2）在方案一中，当 $AB=3$ m 时，求矩形框架 $ABCD$ 的面积 S_1，并比较 S_1,S_2 的大小。

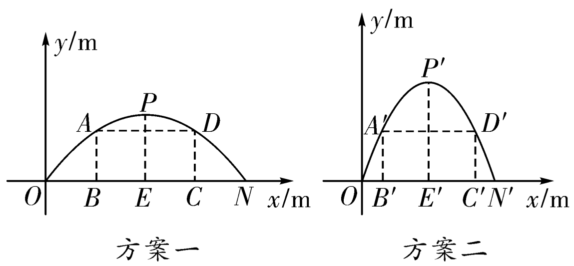


图 2-14-18

解：（1）由题意知，方案一中已知抛物线的顶点 $P(6,4)$，设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-6)^2+4$，将 $N(12,0)$ 代入，

得 $36a+4=0$，解得 $a=-\frac{1}{9}$，

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{9}(x-6)^2+4$。

（2）令 $y=3$，则 $-\frac{1}{9}(x-6)^2+4=3$，

解得 $x_1=3,x_2=9$，

$\therefore BC=6$，

$\therefore S_1=AB\cdot BC=3\times6=18$。

$\because S_2=12\sqrt{2}$，而 $18>12\sqrt{2}$，

$\therefore S_1>S_2$。

2.（2022 · 陕西中考）现要修建一条隧道，其截面为抛物线形状，如图 2-14-19，线段 OE 表示水平的路面，以 O 为坐标原点，以 OE 所在直线为 x 轴，以过点 O 垂直于 x 轴的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系。根据设计要求：$OE=10$ m，该抛物线的顶点 P 到 OE 的距离为 9 m。

（1）求满足设计要求的抛物线的函数表达式；

（2）现需在这一隧道内壁上安装照明灯，如图 2-14-19，即在该抛物线上的点 A,B 处分别安装照明灯。已知点 A,B 到 OE 的距离均为 6 m，求点 A,B 的坐标。

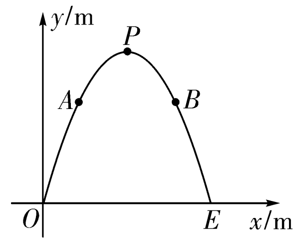


图 2-14-19

解：（1）由题意得，抛物线的顶点 P 的坐标为 $(5,9)$，

设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-5)^2+9$，

把 $(0,0)$ 代入，得 $0=a(0-5)^2+9$，解得 $a=-\frac{9}{25}$，

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{9}{25}(x-5)^2+9$。

（2）令 $y=6$，得 $-\frac{9}{25}(x-5)^2+9=6$，

解得 $x_1=\frac{5\sqrt{3}}{3}+5$，$x_2=-\frac{5\sqrt{3}}{3}+5$，

$\therefore A\left(5-\frac{5\sqrt{3}}{3},6\right)$，$B\left(5+\frac{5\sqrt{3}}{3},6\right)$。

3.（2021 · 陕西中考）已知抛物线 $y=-x^2+2x+8$ 与 x 轴交于点 A,B（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C。

（1）求点 B,C 的坐标；

（2）设点 C' 与点 C 关于该抛物线的对称轴对称。在 y 轴上是否存在点 P，使 $\triangle PCC'$ 与 $\triangle POB$ 相似，且 PC 与 PO 是对应边？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

解：（1）$\because y=-x^2+2x+8$，

令 $x=0$，得 $y=8$，

$\therefore C(0,8)$。

令 $y=0$，得 $-x^2+2x+8=0$，

解得 $x_1=-2$，$x_2=4$，

$\therefore B(4,0)$。

（2）存在。由已知得，该抛物线的对称轴为直线 $x=1$。

$\because$ 点 C' 与点 C 关于直线 $x=1$ 对称，

$\therefore C'(2,8)$，$CC'=2$。

设 $P(0,y)$，

$\because CC'\parallel OB$，且 PC 与 PO 是对应边，

$\therefore$ 当 $\dfrac{PC}{CC'}=\dfrac{PO}{OB}$ 时，$\triangle PCC'\backsim\triangle POB$，

即 $\dfrac{|y-8|}{2}=\dfrac{|y|}{4}$，

解得 $y_1=16$，$y_2=\dfrac{16}{3}$，

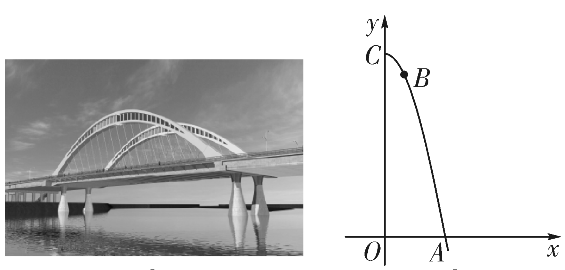
$\therefore P(0,16)$ 或 $P\left(0,\dfrac{16}{3}\right)$。

核心素养培优

1.（2023·贵州中考节选）图 2-14-20①是一座抛物线形拱桥，小星学习二次函数后，受到该图启示设计了一建筑物造型，它的截面图是抛物线的一部分（如图 2-14-20②所示），抛物线的顶点在 C 处，对称轴 OC 与水平线 OA 垂直，$OC=9$，点 A 在抛物线上，且点 A 到对称轴的距离 $OA=3$，点 B 在抛物线上，点 B 到对称轴的距离是 1。

（1）求抛物线的解析式；

（2）如图 2-14-20②，为更加稳固，小星想在 OC 上找一点 P，加装拉杆 PA，PB，同时使拉杆的长度之和最短，请你帮小星找到点 P 的位置并求出坐标。



①　②

图 2-14-20

解：（1）抛物线的对称轴与 y 轴重合，

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y=ax^2+k$。

$\because OC=9$，$OA=3$，

$\therefore C(0,9)$，$A(3,0)$。

将 $C(0,9)$，$A(3,0)$ 代入 $y=ax^2+k$，得

$\begin{cases}k=9,\\9a+k=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=9,\\a=-1,\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+9$。

（2）$\because$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+9$，点 B 到对称轴的距离是 1，

当 $x=1$ 时，$y=-1+9=8$，

$\therefore B(1,8)$。

作点 B 关于 y 轴的对称点 B'，

$\therefore B'(-1,8)$，$B'P=BP$，

$\therefore PA+PB=PA+PB'\geqslant AB'$，

$\therefore$ 当 B'，P，A 共线时，拉杆 PA，PB 的长度之和最短。

设直线 AB' 的解析式为 $y=mx+n$（$m\neq$

0)，

将 $A(3,0)$，$B'(-1,8)$ 代入，

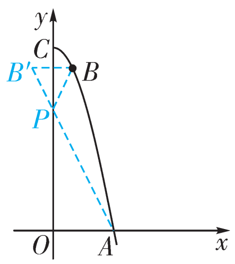
得 $\begin{cases}0=3m+n,\\8=-m+n,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=-2,\\n=6,\end{cases}$

∴ 直线 AB' 的解析式为 $y=-2x+6$，

当 $x=0$ 时，$y=6$，

∴ 点 P 的坐标为 $(0,6)$，位置如图所示。



2.（2023・凉山州中考）如图 2-14-21，已知抛物线与 x 轴交于 $A(1,0)$ 和 $B(-5,0)$ 两点，与 y 轴交于点 C。直线 $y=-3x+3$ 过抛物线的顶点 P。

（1）求抛物线的解析式；

（2）若直线 $x=m(-5<m<0)$ 与抛物线交于点 E，与直线 BC 交于点 F。

①当 EF 取得最大值时，求 m 的值和 EF 的最大值；

②当 $\triangle EFC$ 是等腰三角形时，求点 E 的坐标。

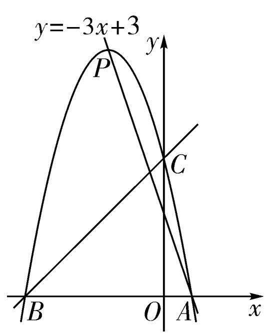


图 2-14-21

解：（1）∵ 抛物线与 x 轴交于 $A(1,0)$ 和 $B(-5,0)$ 两点，

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=\dfrac{-5+1}{2}=-2$。

在 $y=-3x+3$ 中，当 $x=-2$ 时，$y=9$，

∴ 抛物线顶点 P 的坐标为 $(-2,9)$。

设抛物线的解析式为 $y=a(x+2)^2+9$，

将 $A(1,0)$ 代入，得 $a(1+2)^2+9=0$，

∴ $a=-1$，

∴ 抛物线的解析式为 $y=-(x+2)^2+9=-x^2-4x+5$。

（2）①∵ 抛物线的解析式为 $y=-x^2-4x+5$，点 C 是抛物线与 y 轴的交点，

∴ $C(0,5)$。

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$，

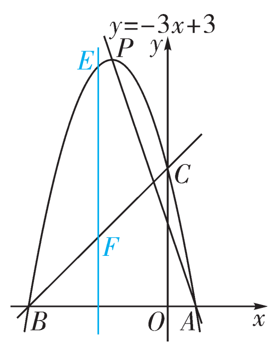
将 $B(-5,0)$，$C(0,5)$ 代入，

得 $\begin{cases}-5k+b=0,\\b=5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=1,\\b=5,\end{cases}$

∴ 直线 BC 的解析式为 $y=x+5$。

∵ 直线 $x=m(-5<m<0)$ 与抛物线交于点 E，与直线 BC 交于点 F，



∴ $E(m,-m^2-4m+5)$，$F(m,m+5)$，

∴ $EF=-m^2-4m+5-(m+5)$

$=-m^2-5m$

$=-\left(m+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$。

∵ $-1<0$，

∴ 当 $m=-\dfrac{5}{2}$ 时，EF 有最大值，最大值为 $\dfrac{25}{4}$。

②设直线 $x=m$ 与 x 轴交于 H，

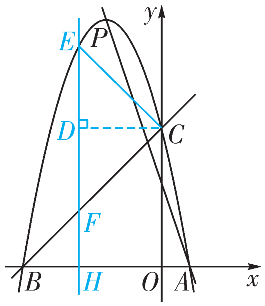
$\therefore BH=m+5, HF=m+5$,

$\therefore BH=HF$,

$\therefore \triangle BHF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle EFC=\angle BFH=45°$。

如图,当 $EC=FC$ 时,



过点 C 作 $CD\perp EF$,垂足为 D,则 $D(m, 5)$,

$\therefore$ 点 D 为 EF 的中点。

由①得 $E(m,-m^2-4m+5)$, $F(m,m+5)$,

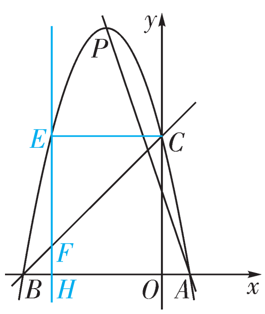
$\therefore \dfrac{-m^2-4m+5+m+5}{2}=5$,

$\therefore m^2+3m=0$,

解得 $m=-3$ 或 $m=0$(舍去),

$\therefore E(-3,8)$;

如图,当 $EF=EC$ 时,又 $\angle EFC=45°$,则 $\triangle EFC$ 是等腰直角三角形,



$\therefore \angle FEC=90°$,

即 $CE\perp EF$,

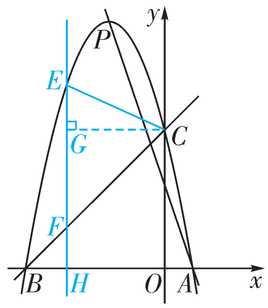
$\therefore$ 点 E 的纵坐标为 5,

$\therefore -m^2-4m+5=5$,

解得 $m=-4$ 或 $m=0$(舍去),

$\therefore E(-4,5)$;

如图,当 $EF=CF$ 时,过点 C 作 $CG\perp EF$,垂足为 G。



$\because \angle EFC=45°$,

$\therefore \triangle CFG$ 是等腰直角三角形,

$\therefore FG=CG=-m$,

$\therefore CF=\sqrt{2}CG=-\sqrt{2}m$, $EF=-m^2-5m$,

$\therefore -m^2-5m=-\sqrt{2}m$,

$\therefore m^2+(5-\sqrt{2})m=0$,

解得 $m=\sqrt{2}-5$ 或 $m=0$(舍去),

$\therefore EF=CF=-\sqrt{2}\times(\sqrt{2}-5)=5\sqrt{2}-2$, $BH=HF=OB-OH=\sqrt{2}$,

$\therefore HE=EF+FH=6\sqrt{2}-2$,

$\therefore E(\sqrt{2}-5, 6\sqrt{2}-2)$。

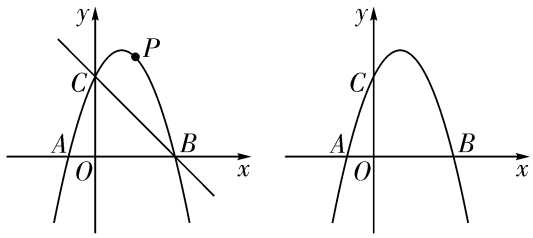
综上所述,点 E 的坐标为 $(-3,8)$ 或 $(-4,5)$ 或 $(\sqrt{2}-5, 6\sqrt{2}-2)$。

3.(2023·达州中考)如图 2-14-22,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $A(-1,0)$, $B(3,0)$, $C(0,3)$。

(1)求抛物线的解析式;

(2)设点 P 是直线 BC 上方抛物线上一点,求出 $\triangle PBC$ 的最大面积及此时点 P 的坐标;

(3)若点 M 是抛物线对称轴上一动点,点 N 为坐标平面内一点,是否存在以 BC 为边,点 B, C, M, N 为顶点的四边形是菱形?若存在,请直接写出点 N 的坐标;若不存在,请说明理由。



备用图

图 2-14-22

解：(1)将点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(0,3)$代入解析式，得

$$\begin{cases}a-b+c=0,\\9a+3b+c=0,\\c=3,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-1,\\b=2,\\c=3,\end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$。

(2)设直线 BC 的解析式为 $y=kx+h(k\neq0)$，将点 B，C 的坐标代入得

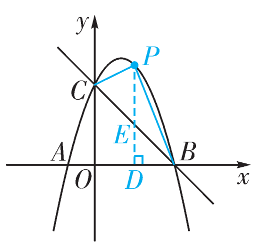
$$\begin{cases}3k+h=0,\\h=3,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=-1,\\h=3,\end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$。

$\because B(3,0)$，

$\therefore OB=3$。

设点 $P(m,-m^2+2m+3)(0<m<3)$，过点 P 作 $PD\perp x$ 轴，垂足为点 D，交 BC 于点 E，如图，



$\therefore E(m,-m+3)$，

$\therefore PE=-m^2+2m+3-(-m+3)=-m^2+3m$，

$\therefore S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times PE\times OB=\frac{1}{2}\times(-m^2+3m)\times3=-\frac{3}{2}m^2+\frac{9}{2}m=-\frac{3}{2}\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$，

$\therefore$ 当 $m=\frac{3}{2}$时，$\triangle PBC$ 的面积最大，最大面积为$\frac{27}{8}$。

$\because -m^2+2m+3=-\frac{9}{4}+3+3=\frac{15}{4}$，

$\therefore P\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$。

(3)存在。理由如下：

$\because B(3,0)$，$C(0,3)$，

$\therefore BC=3\sqrt{2}$。

$\because$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$。

设点 $M(1,t)$，$N(p,q)$。

若 BC 为菱形的边，四边形 $BCMN$ 为菱形，

则 $BC^2=CM^2$，即 $18=1^2+(t-3)^2$，

解得 $t_1=\sqrt{17}+3$，$t_2=-\sqrt{17}+3$。

由中点公式得$\begin{cases}3+1=0+p,\\0+t=3+q,\end{cases}$

$\therefore p=4$，$q=t-3=\pm\sqrt{17}$，

$\therefore N_1(4,\sqrt{17})$，$N_2(4,-\sqrt{17})$；

若 BC 为菱形的边，四边形 $BCNM$ 为菱形，

则 $BC^2=BM^2$，即 $18=(3-1)^2+t^2$，

解得 $t_1=\sqrt{14}$，$t_2=-\sqrt{14}$。

由中点公式得$\begin{cases}3+p=0+1,\\0+q=3+t,\end{cases}$

$\therefore p=-2$，$q=3+t=\pm\sqrt{14}+3$，

$\therefore N_3(-2,\sqrt{14}+3)$，$N_4(-2,-\sqrt{14}+3)$；

综上可得，点 N 的坐标为 $(4,\sqrt{17})$或$(4,-\sqrt{17})$或$(-2,\sqrt{14}+3)$，$(-2,-\sqrt{14}+3)$。

4. (2023 · 武汉中考节选)抛物线 C_1：y

$=x^2-2x-8$ 交 x 轴于 A,B 两点（A 在 B 的左边），交 y 轴于点 C。

（1）直接写出 A,B,C 三点的坐标；

（2）如图 2-14-23，作直线 $x=t(0<t<4)$，分别交 x 轴，线段 BC，抛物线 C_1 于 D,E,F 三点，连接 CF。若 $\triangle BDE$ 与 $\triangle CEF$ 相似，求 t 的值。

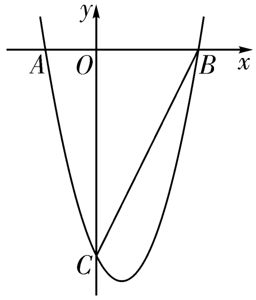


图 2-14-23

解：（1）$\because$ 抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-8$，

$\therefore$ 当 $y=0$ 时，$x^2-2x-8=0$，解得 $x_1=-2$，$x_2=4$；当 $x=0$ 时，$y=-8$，

$\therefore A(-2,0)$，$B(4,0)$，$C(0,-8)$。

（2）$\because$ 点 F 是直线 $x=t(0<t<4)$ 与抛物线 C_1 的交点，

$\therefore F(t,t^2-2t-8)$。

①如图，若 $\triangle BE_1D_1 \backsim \triangle CE_1F_1$ 时，

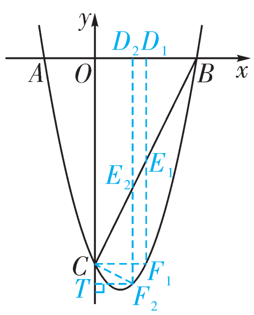
$\because \angle BCF_1=\angle CBD_1$，

$\therefore CF_1 /\!/ OB$。

$\because C(0,-8)$，

$\therefore t^2-2t-8=-8$，

解得 $t=0$（舍去）或 $t=2$。



②如图，若 $\triangle BE_2D_2 \backsim \triangle F_2E_2C$ 时，过 F_2 作 $F_2T\perp y$ 轴，垂足为点 T。

$\because \angle BCF_2=\angle BD_2E_2=\angle BOC=90^\circ$，

$\therefore \angle OCB+\angle OBC=\angle OCB+\angle TCF_2=90^\circ$，

$\therefore \angle TCF_2=\angle OBC$。

$\because \angle CTF_2=\angle BOC=90^\circ$，

$\therefore \triangle CF_2T \backsim \triangle BCO$，

$\therefore \dfrac{F_2T}{CO}=\dfrac{CT}{BO}$。

$\because B(4,0)$，$C(0,-8)$，

$\therefore OB=4$，$OC=8$。

$\because F_2T=t$，$CT=-8-(t^2-2t-8)=2t-t^2$，

$\therefore \dfrac{t}{8}=\dfrac{2t-t^2}{4}$，

解得 $t=0$（舍去）或 $t=\dfrac{3}{2}$。

综上，符合题意的 t 的值为 2 或 $\dfrac{3}{2}$。

5.（2023·巴中中考）在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 经过点 $A(-1,0)$ 和 $B(0,3)$，其顶点的横坐标为 1。

（1）求抛物线的解析式；

（2）若直线 $x=m$ 与 x 轴交于点 N，在第一象限内与抛物线交于点 M，当 m 取何值时，使得 $AN+MN$ 有最大值，并求出最大值；

（3）若点 P 为抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的对称轴上一动点，将抛物线向左平移 1 个单位长度后，Q 为平移后抛物线上一动点。在（2）的条件下求得的点 M，是否能与 A,P,Q 构成平行四边形？若能构成，求出 Q 点坐标；若不能构成，请说明理由。

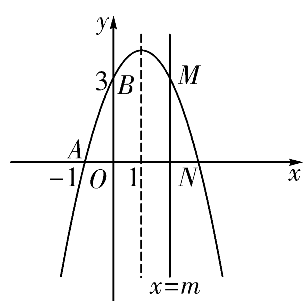


图 2-14-24

解：（1）$\because$ 抛物线的顶点横坐标为 1，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$。

$\because A(-1,0)$，

$\therefore$ 抛物线与 x 轴另一交点坐标为 $(3,0)$，

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x$

$-3)$，

代入 $B(0,3)$，得 $-3a=3$，

解得 $a=-1$，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$。

(2) $\because$ 点 M 在抛物线上，$N(m,0)$，

$\therefore M(m,-m^2+2m+3)$。

$\because$ 点 M 在第一象限，

$\therefore MN=-m^2+2m+3$，$AN=m+1$，

$\therefore MN+AN=-m^2+2m+3+m+1=-m^2+3m+4=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$。

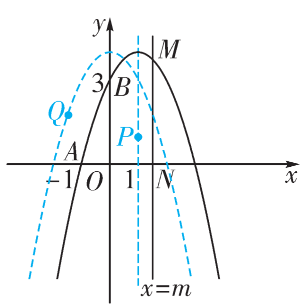
$\because 0<m<3$，

$\therefore$ 当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$AN+MN$ 有最大值，最大值为$\frac{25}{4}$。

(3) 抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 向左平移 1 个单位长度后的抛物线为 $y=-(x+1)^2+2(x+1)+3=-x^2+4$。

由(2)知 $M\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$，$A(-1,0)$，

设 $P(1,t)$，$Q(n,-n^2+4)$，假设存在以 A,P,Q,M 为顶点的平行四边形。



①当以 AM 为平行四边形的对角线时，

$\because$ 平行四边形对角线互相平分，

$\therefore \frac{x_A+x_M}{2}=\frac{x_Q+x_P}{2}$，即$\frac{-1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{n+1}{2}$，

$\therefore n=-\frac{1}{2}$。

$\therefore -n^2+4=\frac{15}{4}$，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为$\left(-\frac{1}{2},\frac{15}{4}\right)$；

②当以 AQ 为平行四边形对角线时，

$\therefore \frac{x_A+x_Q}{2}=\frac{x_P+x_M}{2}$，即$\frac{-1+n}{2}=\frac{1+\frac{3}{2}}{2}$，

$\therefore n=\frac{7}{2}$，则 $-n^2+4=-\frac{33}{4}$，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为$\left(\frac{7}{2},-\frac{33}{4}\right)$；

③当以 AP 为平行四边形对角线时，

$\therefore \frac{x_A+x_P}{2}=\frac{x_Q+x_M}{2}$，即 $\frac{-1+1}{2}=\frac{n+\frac{3}{2}}{2}$，

$\therefore n=-\frac{3}{2}$，则 $-n^2+4=\frac{7}{4}$，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$。

综上所述，存在以 A,P,Q,M 为顶点的平行四边形，点 Q 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{15}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{7}{2},-\frac{33}{4}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$。

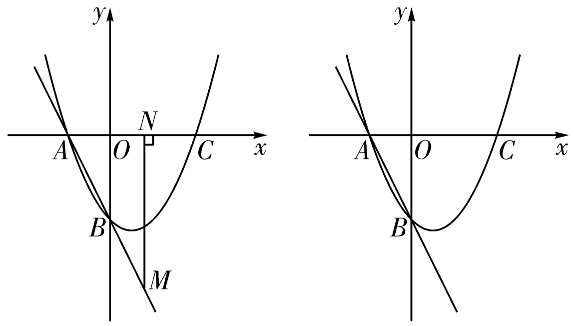
6. (2022·泰安中考) 若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(-2,0)$，$B(0,-4)$，其对称轴为直线 $x=1$，与 x 轴的另一交点为 C。

(1) 求二次函数的表达式；

(2) 若点 M 在直线 AB 上，且在第四象限，过点 M 作 $MN\perp x$ 轴，垂足为点 N。

①若点 N 在线段 OC 上，且 $MN=3NC$，求点 M 的坐标；

②以 MN 为对角线作正方形 $MPNQ$ (点 P 在 MN 右侧)，当点 P 在抛物线上时，求点 M 的坐标。



备用图

图 2-14-25

解：(1)∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(-2,0)$，$B(0,-4)$，

∴ $c=-4$。

又对称轴为直线 $x=1$，

∴ $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=1,\\ 4a-2b-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\ b=-1,\end{cases}$

∴ 二次函数的表达式为 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-4$。

(2)①设直线 AB 的表达式为 $y=kx+n$ $(k\neq0)$，

∵ $A(-2,0)$，$B(0,-4)$，

∴ $\begin{cases}-2k+n=0,\\ n=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\ n=-4,\end{cases}$

∴ 直线 AB 的表达式为 $y=-2x-4$。

∵ A，C 关于直线 $x=1$ 对称，

∴ $C(4,0)$。

设 $N(m,0)$ $(0<m<4)$。

∵ $MN\perp x$ 轴，

∴ $M(m,-2m-4)$，

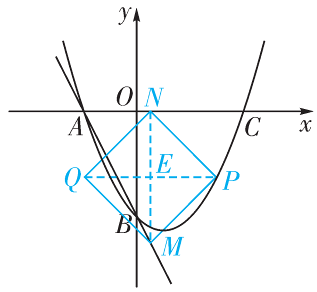
∴ $NC=4-m$。

又 $MN=3NC$，

∴ $2m+4=3(4-m)$，解得 $m=\dfrac{8}{5}$，

∴ 点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{36}{5}\right)$。

②如图，连接 PQ，MN 交于点 E。设 $M(t,-2t-4)$ $(t>0)$，则 $N(t,0)$。



∵ 四边形 $MPNQ$ 是正方形，

∴ $PQ\perp MN$，$NE=EP$，$NE=\dfrac{1}{2}MN$，

∴ $PQ\parallel x$ 轴，

∴ $E(t,-t-2)$，

∴ $NE=t+2$，

∴ $ON+EP=ON+NE=t+t+2=2t+2$，

∴ $P(2t+2,-t-2)$。

∵ 点 P 在抛物线 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-4$ 上，

∴ $\dfrac{1}{2}(2t+2)^2-(2t+2)-4=-t-2$，

解得 $t_1=\dfrac{1}{2}$，$t_2=-2$。

∵ 点 P 在第四象限，

∴ $t=-2$(舍去)，即 $t=\dfrac{1}{2}$，

∴ 点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},-5\right)$。

第 15 讲　相交线与平行线

重难点突破

重点 1　三种距离

两点间的距离实质是连接两点的线段的长度；点到直线的距离实质是垂线段的长度；两平行线的距离实质是一条直线上的任意一点向另一条直线作垂线段的长度。三种距离有着内在的联系，它们都可归结为线段的长度。解答与“距离”有关的问题要注意：(1)无图题往往有多种可能，不要遗漏答案；(2)两平行线的距离、点到直线的距离不要忽略“垂直”这一基本条件。

重点 2　平行线的判定与性质

同位角相等$\overset{\text{判定}}{\underset{\text{性质}}{=\!=\!=}}$两直线平行；内错角相等$\overset{\text{判定}}{\underset{\text{性质}}{=\!=\!=}}$两直线平行；同旁内角互补$\overset{\text{判定}}{\underset{\text{性质}}{=\!=\!=}}$两直线平行。

重点 3　解决问题常用的模型

1. 两点之间线段最短。如图 2-15-1，在点 A，B 的所有连线中，线段 AB 最短。

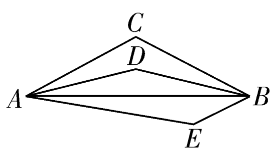


图 2-15-1

2. 垂线段最短。如图 2-15-2，在直线 l 外一点 A 到直线 l 上所有点的连线中，垂线段 AB 最短。

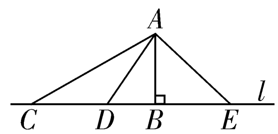


图 2-15-2

3. 平行线中常用辅助线模型。

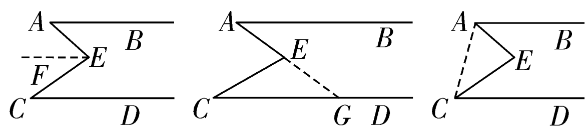


图 2-15-3

易混淆点　邻补角与补角

邻补角与补角是两个不同的概念，互补的两个角只有数量关系，没有位置关系，只要这两个角度数的和等于 180°即可；邻补角不但有数量上的关系，还有位置上的关系，不仅要满足两个角度数的和等于 180°，还要求这两个角有一个公共顶点，有一条公共边，另外两边互为反向延长线，即两个角互为邻补角时，这两个角一定互为补角，但互补的两个角不一定是邻补角。

经典试题解析

知识点 1　直线、射线和线段

例 1　工人砌墙时，先在两个墙脚的位置分别插一根木桩，再拉一条直的参照线，就能使砌的砖在一条直线上，这样做应用的

数学知识是　(　　)

A. 两点之间,线段最短

B. 两点确定一条直线

C. 垂线段最短

D. 三角形两边之和大于第三边

思路分析　考查两点确定一条直线。

解答　B

知识点 2　余角和补角

例 2　(2023 · 江西中考)如图 2-15-4,平面镜 MN 放置在水平地面 CD 上,墙面 $PD \perp CD$,垂足为点 D,一束光线 AO 照射到镜面 MN 上,反射光线为 OB,点 B 在 PD 上。若 $\angle AOC = 35°$,则 $\angle OBD$ 的度数为　(　　)

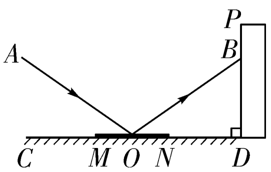


图 2-15-4

A. 35°　　B. 45°　　C. 55°　　D. 65°

思路分析　根据题意可得 $\angle AOC = \angle BOD$,进而根据直角三角形的两个锐角互余即可求解。

解答　依题意,得 $\angle AOC = \angle BOD$,$\angle AOC = 35°$,

$\therefore \angle BOD = 35°$。

$\because PD \perp CD$,

$\therefore \angle ODB = 90°$,

$\therefore \angle OBD = 90° - \angle BOD = 55°$。

故选 C。

知识点 3　对顶角

例 3　(2023 · 河南中考)如图 2-15-5,直线 AB,CD 相交于点 O。若 $\angle 1 = 80°$,$\angle 2 = 30°$,则 $\angle AOE$ 的度数为　(　　)

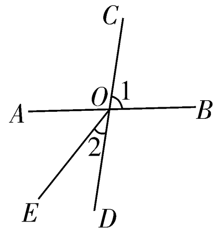


图 2-15-5

A. 30°　　B. 50°　　C. 60°　　D. 80°

思路分析　由对顶角的性质得到 $\angle AOD = \angle 1 = 80°$,即可求出 $\angle AOE$ 的度数。

解答　$\because \angle AOD = \angle 1 = 80°$,

$\therefore \angle AOE = \angle AOD - \angle 2 = 80° - 30° = 50°$。

故选 B。

知识点 4　平行线的性质

例 4　(2023 · 绥化中考)将一副三角板按如图 2-15-6 所示摆放在一组平行线内,$\angle 1 = 25°$,$\angle 2 = 30°$,则 $\angle 3$ 的度数为(　　)

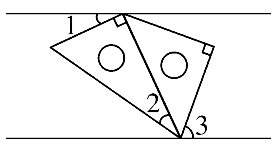


图 2-15-6

A. 55°　　B. 65°　　C. 70°　　D. 75°

思路分析　由题意可求得 $\angle BAC = 115°$,再由平行线的性质可求得 $\angle ACD$ 的度数,结合平角的定义即可求得 $\angle 3$ 的度数。

解答　由题意可得 $\angle CAE = 90°$,$\angle ACF = 45°$,

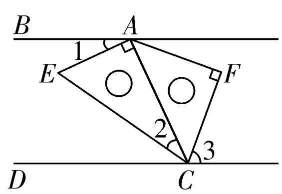


图 2-15-7

$\because \angle 1 = 25°$,

$\therefore \angle BAC = \angle 1 + \angle CAE = 115°$。

$\because AB /\!/ CD$,$\therefore \angle BAC + \angle ACD = 180°$,

$\therefore \angle ACD = 180° - \angle BAC = 65°$,

$\therefore \angle 3=180°-\angle ACD-\angle ACF=70°$。

故选 C。

知识点 5 平行线的判定

例 5 （2023·金华中考）如图 2-15-8，已知 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=50°$，则 $\angle 4$ 的度数是 （　　）

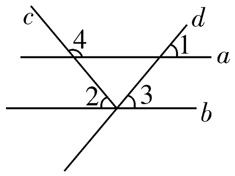


图 2-15-8

A. 120°　B. 125°　C. 130°　D. 135°

思路分析 由“同位角相等，两直线平行”得到 $a/\!/b$，再由“两直线平行，同旁内角互补”求出 $\angle 5$ 的度数，根据对顶角相等即可求出 $\angle 4$ 的度数。

解答 $\because \angle 1=\angle 3=50°$，

$\therefore a/\!/b$，$\therefore \angle 5+\angle 2=180°$。

$\because \angle 2=50°$，

$\therefore \angle 5=130°$，

$\therefore \angle 4=\angle 5=130°$。

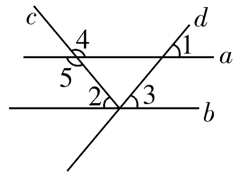


图 2-15-9

故选 C。

陕西中考链接

1. （2023·陕西中考）如图 2-15-10，$l/\!/AB$，$\angle A=2\angle B$。若 $\angle 1=108°$，则 $\angle 2$ 的度数为 （ A ）

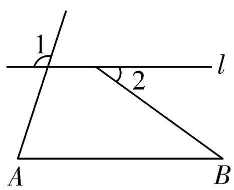


图 2-15-10

A. 36°　B. 46°　C. 72°　D. 82°

2. （2022·陕西中考）如图 2-15-11，$AB/\!/CD$，$BC/\!/EF$。若 $\angle 1=58°$，则 $\angle 2$ 的大小为 （ B ）

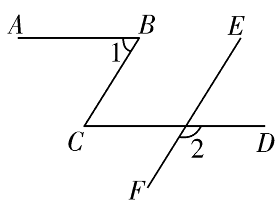


图 2-15-11

A. 120°　B. 122°　C. 132°　D. 148°

核心素养培优

1. （2023·潍坊中考改编）下列命题正确的是 （ A ）

A. 在一个三角形中至少有两个锐角

B. 一个角的补角大于这个角本身

C. 如果两个角互余，那么它们的补角也互余

D. 两条直线被第三条直线所截，同位角一定相等

2. (2023 · 黄冈中考)如图 2-15-12,Rt△ABC的直角顶点 A 在直线 a 上,斜边 BC 在直线 b 上。若 $a/\!/b$,$\angle 1=55°$,则$\angle 2=$ (C)

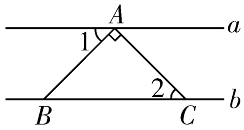


图 2-15-12

A. 55° B. 45° C. 35° D. 25°

3. (2023 · 宜宾中考)如图 2-15-13,$AB/\!/CD$,且$\angle A=40°$,$\angle D=24°$,则$\angle E$ 等于 (D)

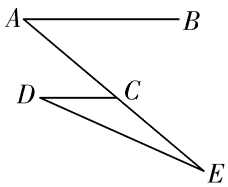


图 2-15-13

A. 40° B. 32° C. 24° D. 16°

4. (2023 · 达州中考)如图 2-15-14,$AE/\!/CD$,AC 平分$\angle BCD$,$\angle 2=35°$,$\angle D=60°$,则$\angle B=$ (B)

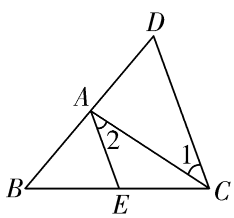


图 2-15-14

A. 52° B. 50° C. 45° D. 25°

5. (2023 · 山西中考)如图 2-15-15,一束平行于主光轴的光线经凸透镜折射后,其折射光线与一束经过光心 O 的光线相交于点 P,点 F 为焦点。若$\angle 1=155°$,$\angle 2=30°$,则$\angle 3$ 的度数为 (C)

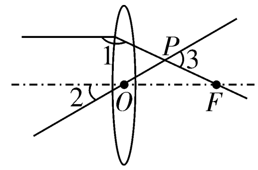


图 2-15-15

A. 45° B. 50° C. 55° D. 60°

6. (2023 · 临沂中考)在同一平面内,过直线 l 外一点 P 作 l 的垂线 m,再过 P 作 m 的垂线 n,则直线 l 与 n 的位置关系是 (C)

A. 相交 B. 相交且垂直

C. 平行 D. 不能确定

7. 直线 AB,BC,CD,EG 如图 2-15-16 所示,$\angle 1=\angle 2=80°$,$\angle 3=40°$,则下列结论错误的是 (D)

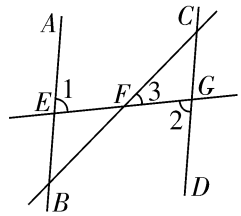


图 2-15-16

A. $AB/\!/CD$

B. $\angle EBF=40°$

C. $\angle FCG+\angle 3=\angle 2$

D. $EF>BE$

8. (2023 · 荆州中考)如图 2-15-17 所示的“箭头”图形中,$AB/\!/CD$,$\angle B=\angle D=80°$,$\angle E=\angle F=47°$,则图中$\angle G$ 的度数是 (C)

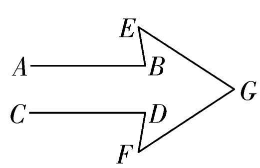


图 2-15-17

A. 80°　　B. 76°　　C. 66°　　D. 56°

9. (2023·烟台中考)一杆古秤在称物时的状态如图 2-15-18 所示,已知∠1 = 102°,则∠2 的度数为__78°__。

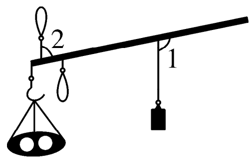


图 2-15-18

10. (2023·台州中考)用一张等宽的纸条折成如图 2-15-19 所示的图案。若∠1 = 20°,则∠2 的度数为__140°__。

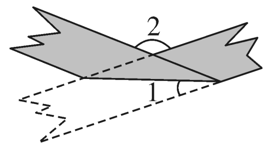


图 2-15-19

11. 若∠A = 53°30′,则∠A 的补角的度数是__126.5°__。

第 16 讲　三角形与特殊三角形

重难点突破

重点 1　三角形中的重要线段

1. 三角形的高:由高线可得直角,常与勾股定理、三角形面积相关;三角形三条高的交点是三角形的垂心。

2. 三角形的中线:中线将三角形分为面积相等的两个三角形;三角形三条中线的交点是三角形的重心,重心到三角形顶点的距离等于它到对边中点距离的 2 倍。

3. 角平分线:角平分线上的点到角两边的距离相等;三角形三条角平分线的交点是三角形的内心,内心到三角形三边的距离相等,内心即三角形内切圆的圆心。

4. 中位线:三角形的中位线平行于第三边,并且等于第三边的一半。

重点 2　勾股定理

常见类型:

(1)勾股定理在几何中的应用:利用勾股定理求几何图形的面积和有关线段的长度;

(2)由勾股定理演变的结论:分别以一个直角三角形的三边为边长向外作边数相同的正多边形,以斜边为边长的正多边形的面积等于以直角边为边长的正多边形的面积和;

(3)勾股定理在实际问题中的应用:运用勾股定理的数学模型解决实际问题;

(4)用勾股定理在数轴上找到表示无理数的点:首先构造直角三角形,利用勾股定理把一个无理数表示成直角边是两个正整数的直角三角形的斜边的长,再以原点为圆心,以无理数斜边长为半径画弧与数轴存在交点,在原点左边的点表示负无理数,在原点右边的点表示正无理数。

易错点　三角形中的分类讨论

1. 等腰三角形中求周长时容易忽略要满足三边关系：当腰与底不明确时，需要分类讨论，然后判断三边长是否满足三边关系，不满足时要舍去；

2. 等腰三角形顶角、底角不明确时，求角度容易漏解：顶角、底角不明确时一般要分情况讨论，然后根据“三角形内角和为180°”及“等腰三角形两底角相等”求解，注意：等腰三角形的底角只能是锐角；

3. 问题中无图时容易漏解：与高结合求角度时，若不明确是锐角三角形或钝角三角形，则要分高在三角形的内部和外部两种情况求解；

4. 确定等腰三角形个数时漏解：在坐标系或网格中，给出一边确定等腰三角形的个数时，应分已知边为底边和已知边为腰两种情况讨论。

经典试题解析

知识点 1　三角形三边关系

例 1　(2023·连云港中考)一个三角形的两边长分别是 3 和 5，则第三边长可以是________。(只填一个即可)

思路分析　根据三角形的三边关系“三角形两边之和大于第三边，三角形的两边之差小于第三边”即可求解。

解答　设第三边长为 x，由题意得，

$5-3<x<5+3$，

得 $2<x<8$。

故答案可为 4(答案不唯一，大于 2 且小于 8 之间的数均可)。

知识点 2　特殊三角形

例 2　(2023·重庆中考)如图 2-16-1，在△ABC 中，$AB=AC$，AD 是 BC 边的中线。若 $AB=5$，$BC=6$，则 AD 的长度为________。

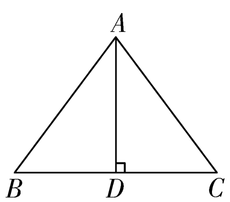


图 2-16-1

思路分析　根据等腰三角形的性质和勾股定理求解即可。

解答　∵ 在△ABC 中，$AB=AC$，AD 是 BC 边的中线，

∴ $AD\perp BC$，$BD=\frac{1}{2}BC$。

在 Rt△ABD 中，$AB=5$，$BD=\frac{1}{2}BC=3$，

∴ $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$。

故答案为 4。

知识点 3　三角形中的重要线段

例 3　如图 2-16-2，在△ABC 中，$AD\perp BC$，$CE\perp AB$，垂足分别为点 D 和点 E，AD 与 CE 交于点 O，连接 BO 并延长交 AC 于点 F。若 $AB=5$，$BC=4$，$AC=6$，则 $CE:AD:BF$ 的值为________。

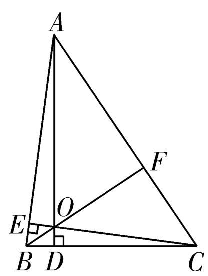


图 2-16-2

思路分析 由题意得 $BF\perp AC$，再根据三角形的面积公式得 $S_{\triangle ABC}=2AD=\frac{5}{2}CE=3BF$，进而即可得到答案。

解答 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，$CE\perp AB$，垂足分别为点 D 和点 E，AD 与 CE 交于点 O，

$\therefore BF\perp AC$。

$\because AB=5$，$BC=4$，$AC=6$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}AC\cdot BF$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=2AD=\frac{5}{2}CE=3BF$，

$\therefore CE:AD:BF=12:15:10$。

故答案为 $12:15:10$。

知识点 4 勾股定理

例 4 （2023 · 新疆中考）如图 2-16-3，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，以点 A 为圆心，适当长为半径作弧，交 AB 于点 F，交 AC 于点 E，分别以点 E，F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 长为半径作弧，两弧在 $\angle BAC$ 的内部交于点 G，作射线 AG 交 BC 于点 D。若 $AC=3$，$BC=4$，则 CD 的长为（　　）

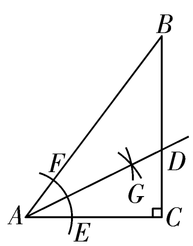


图 2-16-3

A. $\frac{7}{8}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

思路分析 过点 D 作 $DH\perp AB$，垂足为点 H，由勾股定理求得 AB 的长，根据作图可得 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，进而设 $CD=DH=x$，则 $BD=4-x$，根据 $\sin B=\frac{HD}{BD}=\frac{AC}{AB}$，代入计算即可求解。

解答 如图 2-16-4，过点 D 作 $DH\perp AB$，垂足为点 H，

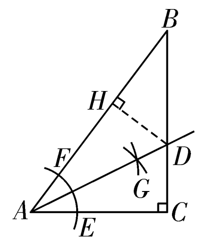


图 2-16-4

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=3$，$BC=4$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

根据作图可得 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore DC=DH$。

设 $CD=DH=x$，$BD=4-x$，

$\because \sin B=\frac{HD}{BD}=\frac{AC}{AB}$，

$\therefore \frac{x}{4-x}=\frac{3}{5}$，

解得 $x=\frac{3}{2}$。

故选 C。

陕西中考链接

1. （2023 · 陕西中考）如图 2-16-5，DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，点 F 在 DB 上，$DF=2BF$，连接 EF 并延长，与 CB 的延长线相交于点 M。若 $BC=6$，则线段 CM 的长为（ C ）

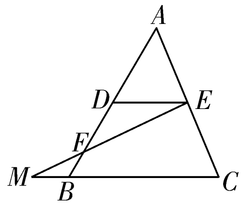


图 2-16-5

A. $\frac{13}{2}$　　B. 7　　C. $\frac{15}{2}$　　D. 8

2. (2021 · 陕西中考) 如图 2-16-6，点 D，E 分别在线段 BC，AC 上，连接 AD，BE。若 $\angle A = 35°$，$\angle B = 25°$，$\angle C = 50°$，则 $\angle 1$ 的大小为　　(B)

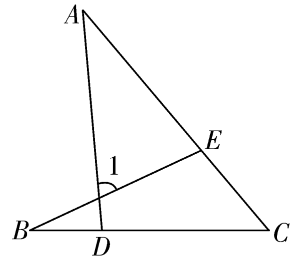


图 2-16-6

A. 60°　　B. 70°　　C. 75°　　D. 85°

核心素养培优

1. (2023 · 衡阳中考) 下列长度的各组线段能组成一个三角形的是　　(D)

A. 1 cm, 2 cm, 3 cm

B. 3 cm, 8 cm, 5 cm

C. 4 cm, 5 cm, 10 cm

D. 4 cm, 5 cm, 6 cm

2. (2023 · 云南中考) 如图 2-16-7，A，B 两点被池塘隔开，A，B，C 三点不共线。设 AC，BC 的中点分别为 M，N。若 $MN = 3$ m，则 $AB =$　　(B)

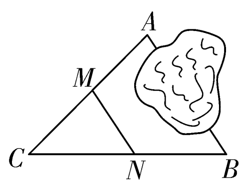


图 2-16-7

A. 4 m　　B. 6 m

C. 8 m　　D. 10 m

3. (2023 · 武威中考) 如图 2-16-8，BD 是等边三角形 ABC 的边 AC 上的高，以点 D 为圆心，DB 长为半径作弧交 BC 的延长线于点 E，则 $\angle DEC =$　　(C)

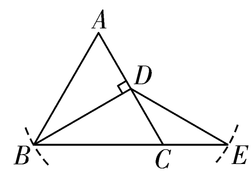


图 2-16-8

A. 20°　　B. 25°　　C. 30°　　D. 35°

4. (2023 · 南充中考) 如图 2-16-9，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AC = 6$，$AB = 10$，以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AC，AB 于点 M，N，再分别以 M，N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle CAB$ 的内部相交于点 P，画射线 AP 与 BC 交于点 D，$DE \perp AB$，垂足为 E，则下列结论错误的是　　(C)

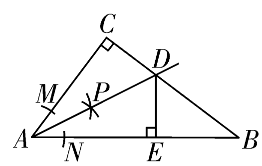


图 2-16-9

A. $\angle CAD = \angle BAD$

B. $CD = DE$

C. $AD = 5\sqrt{3}$

D. $CD:BD=3:5$

5. (2023 · 河北中考)在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,$\angle B=\angle B'=30°$,$AB=A'B'=6$,$AC=A'C'=4$。已知 $\angle C=n°$,则 $\angle C'=$ (C)

A. $30°$　　B. $n°$

C. $n°$或 $180°-n°$　　D. $30°$或 $150°$

6. (2023 · 杭州中考)第二十四届国际数学家大会会徽的设计基础是 1700 多年前中国古代数学家赵爽的“弦图”。如图 2-16-10,在由四个全等的直角三角形($\triangle DAE$,$\triangle ABF$,$\triangle BCG$,$\triangle CDH$)和中间一个小正方形 $EFGH$ 拼成的大正方形 $ABCD$ 中,$\angle ABF>\angle BAF$,连接 BE。设 $\angle BAF=\alpha$,$\angle BEF=\beta$,若正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的面积之比为 $1:n$,$\tan\alpha=\tan^2\beta$,则 $n=$ (C)

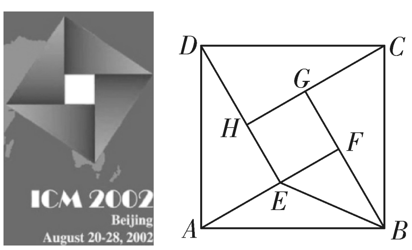


图 2-16-10

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

7. (2023 · 江西中考)将含 30°角的直角三角板和直尺按如图 2-16-11 所示的方式放置,已知 $\angle\alpha=60°$,点 B,C 表示的刻度分别为 1 cm,3 cm,则线段 AB 的长为 <u>2</u> cm。

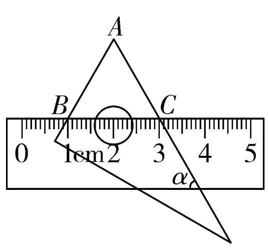


图 2-16-11

8. (2023 · 新疆中考)如图 2-16-12,在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB=AC$,$AD=BD$,$\angle CAD=24°$,则 $\angle C=$ <u>52</u> °。

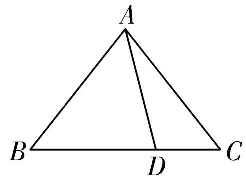


图 2-16-12

9. (2023 · 济宁中考)如图 2-16-13,$\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形,点 D,E 在边 BC 上。若 $\angle DAE=30°$,$\tan\angle EAC=\frac{1}{3}$,则 $BD=$ <u>$3-\sqrt{3}$</u>。

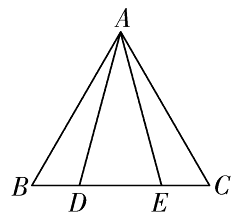


图 2-16-13

10. (2023 · 上海中考)如图 2-16-14,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=35°$,将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 旋转 $\alpha(0°<\alpha<180°)$,旋转后的点 B 落在 BC 上,点 B 的对应点为 D,连接 AD,AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,则 $\alpha=$ <u>$\left(\frac{110}{3}\right)°$</u>。

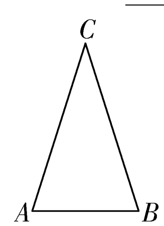


图 2-16-14

11. (2023 · 青海中考)在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle BAC=100°$,点 D 在 BC 边上,连接 AD。若 $\triangle ABD$ 是直角三角形,则 $\angle ADB$ 的度数是 <u>90°或 50°</u>。

12. (2023 · 聊城中考)如图 2-16-15,在四边形 $ABCD$ 中,点 E 是边 BC 上一点,且 $BE=CD$,$\angle B=\angle AED=\angle C$。

(1)求证：$\angle EAD=\angle EDA$；

(2)若$\angle C=60°$，$DE=4$时，求$\triangle AED$的面积。

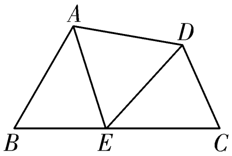


图 2-16-15

(1)证明：$\because \angle B=\angle AED$，

$\therefore 180°-\angle B=180°-\angle AED$，即$\angle BEA+\angle BAE=\angle BEA+\angle CED$，

$\therefore \angle BAE=\angle CED$。

在$\triangle BAE$和$\triangle CED$中，

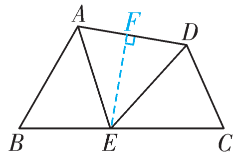
$$\begin{cases}\angle B=\angle C,\\ \angle BAE=\angle CED,\\ BE=CD,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BAE\cong\triangle CED(\text{AAS})$，

$\therefore EA=ED$，

$\therefore \angle EAD=\angle EDA$。

(2)解：如图，过点E作$EF\perp AD$，垂足为F。



由(1)知$EA=ED$，

$\because \angle AED=\angle C=60°$，

$\therefore \triangle AED$为等边三角形，

$\therefore \angle AEF=\angle DEF=30°$。

$\because DE=4$，

$\therefore DF=\frac{1}{2}DE=2$，

$\therefore AD=DE=4$，$EF=\sqrt{DE^2-DF^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AD\cdot EF=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$。

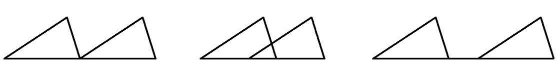
第 17 讲　全等三角形

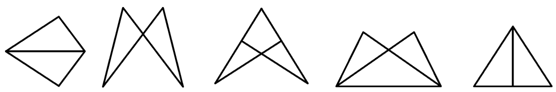
重难点突破

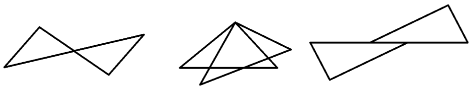
重点 1　全等三角形的判定方法的选择

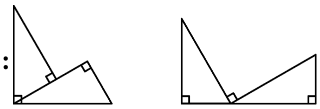
判定方法
- 已知两边相等
  - 找夹角→SAS
  - 找另一条边→SSS
- 已知一边和一角相等
  - 边为角的对边→找另一个角→AAS
  - 边为角的邻边
    - 找已知角的另一条边→SAS
    - 找已知边上的另一个角→ASA
    - 找已知边的对角→AAS
- 已知两角相等
  - 找夹边→ASA
  - 找已知角的对边→AAS

重点 2　全等三角形的常见模型

1. 平移型：

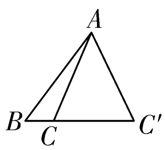
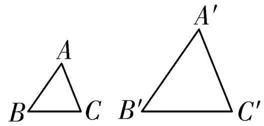
2. 轴对称型：

3. 旋转型：

4. 一线三等角型：

易错点 全等三角形的判定

1. “SSA”和“AAA”不能判定两个三角形全等（如下表）。

图形		
条件	$AB=AB, AC=AC', \angle B=\angle B$	$\angle A=\angle A', \angle B=\angle B', \angle C=\angle C'$
结论	$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$ 不全等	$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 不全等

2. 全等三角形判定定理有 5 个：“SSS”“ASA”“AAS”“SAS”和“HL”，其中前 4 个适用于任意两个三角形全等的判定，而第 5 个“HL”是两个直角三角形全等的判定定理。

3. “SAS”与“SSA”的区别：“SAS”一定要体现两边及“夹”角；“SSA”是指两边及一边的“对”角。

经典试题解析

知识点 1 全等三角形的性质和判定

例 1 （2023 · 河南中考）如图 2-17-1，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上，且 $AD=AB$。

（1）请用无刻度的直尺和圆规作出 $\angle A$ 的平分线；（保留作图痕迹，不写作法）

（2）若（1）中所作的角平分线与边 BC 交于点 E，连接 DE。求证：$DE=BE$。

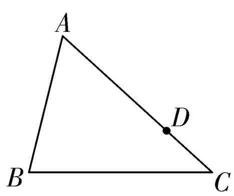


图 2-17-1

思路分析 （1）利用角平分线的作图步骤作图即可；

（2）证明 $\triangle BAE \cong \triangle DAE$，即可得出结论。

解 （1）如图 2-17-2，射线 AE 即为所求。

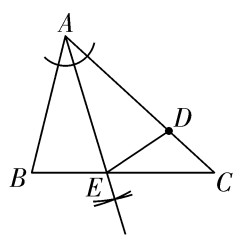


图 2-17-2

（2）证明：$\because$ AE 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle BAE=\angle DAE$。

$\because AB=AD, AE=AE$，

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DAE$(SAS)，

$\therefore DE=BE$。

知识点 2 全等三角形的应用

例 2 （2020·陕西中考）如图 2-17-3，小明家与小华家住在同一栋楼的同一单元，他俩想测算所住楼对面商业大厦的高 MN。他俩在小明家的窗台 B 处，测得商业大厦顶部 N 的仰角 $\angle 1$ 的度数，由于楼下植物的遮挡，不能在 B 处测得商业大厦底部 M 的俯角的度数。于是，他俩上楼来到小华家，在窗台 C 处测得大厦底部 M 的俯角 $\angle 2$ 的度数，竟然发现 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 恰好相等。已知 A, B, C 三点共线，$CA \perp AM, NM \perp AM, AB=31$ m，$BC=18$ m，试求商业大厦的高 MN。

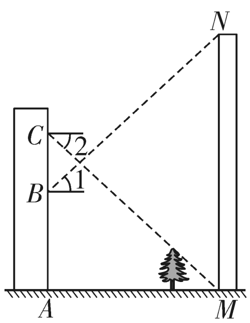


图 2-17-3

思路分析 过点 C 作 $CE \perp MN$，垂足为点 E，过点 B 作 $BF \perp MN$，垂足为点 F，可得四边形 $AMEC$ 和四边形 $AMFB$ 均为矩形，可以证明 $\triangle BFN \cong \triangle CEM$，得 $NF=EM=49$，进而可得商业大厦的高 MN。

解 如图 2-17-4，过点 C 作 $CE \perp MN$，垂足为点 E，过点 B 作 $BF \perp MN$，垂足为点 F，

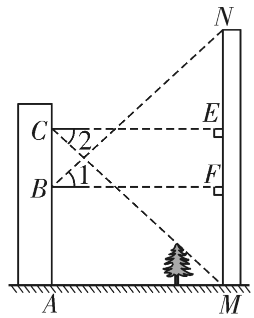


图 2-17-4

$\therefore \angle CEF=\angle BFE=90°$。

$\because CA \perp AM, MN \perp AM$，

$\therefore$ 四边形 $AMEC$ 和四边形 $AMFB$ 均为矩形，

$\therefore CE=BF, ME=AC$。

$\because \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \triangle BFN \cong \triangle CEM$(ASA)，

$\therefore NF=EM=31+18=49$，

由矩形性质可知，$EF=CB=18$，

$\therefore MN=NF+EM-EF=49+49-18=80$(m)。

答：商业大厦的高 MN 为 80 m。

陕西中考链接

1. （2023·陕西中考）如图 2-17-5，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=50°, \angle C=20°$。过点 A 作 $AE \perp BC$，垂足为 E，延长 EA 至点 D。使 $AD=AC$。在边 AC 上截取 $AF=AB$，连接 DF。求证：$DF=CB$。

证明：$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=50°, \angle C=20°$，

$\therefore \angle CAB=180°-\angle B-\angle C=110°$。

$\because AE \perp BC$，

$\therefore \angle AEC=90°$，

$\therefore \angle DAF=\angle AEC+\angle C$

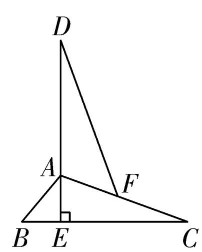


图 2-17-5

$=110°$,

$\therefore \angle DAF=\angle CAB$。

又$\because AD=AC$, $AF=AB$,

$\therefore \triangle DAF\cong\triangle CAB$(SAS),

$\therefore DF=CB$。

2. (2022·陕西中考)如图 2-17-6,在$\triangle ABC$中,点 D 在边 BC 上,$CD=AB$,$DE/\!/AB$,$\angle DCE=\angle A$。求证:$DE=BC$。

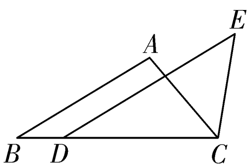


图 2-17-6

证明:$\because DE/\!/AB$,

$\therefore \angle EDC=\angle B$。

又$\because CD=AB$,$\angle DCE=\angle A$,

$\therefore \triangle CDE\cong\triangle ABC$(ASA),

$\therefore DE=BC$。

3. (2021·陕西中考)如图 2-17-7,$BD/\!/AC$,$BD=BC$,点 E 在 BC 上,且 $BE=AC$。求证:$\angle D=\angle ABC$。

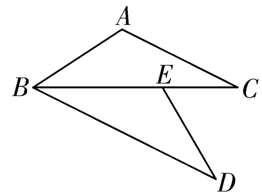


图 2-17-7

证明:$\because BD/\!/AC$,

$\therefore \angle ACB=\angle EBD$。

在$\triangle ABC$和$\triangle EDB$中,

$$\begin{cases}CB=BD,\\ \angle ACB=\angle EBD,\\ AC=EB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle EDB$(SAS),

$\therefore \angle ABC=\angle D$。

核心素养培优

1. (2022·金华中考)如图 2-17-8,AC 与 BD 相交于点 O,$OA=OD$,$OB=OC$,不添加辅助线,判定$\triangle ABO\cong\triangle DCO$的依据是 (B)

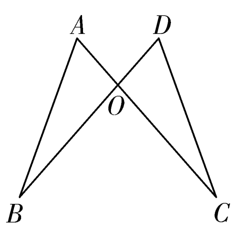


图 2-17-8

A. SSS　　B. SAS　　C. AAS　　D. HL

2. (2023·成都中考)如图 2-17-9,已知$\triangle ABC\cong\triangle DEF$,点 B,E,C,F 依次在同一条直线上。若 $BC=8$,$CE=5$,则 CF 的长为__3__。

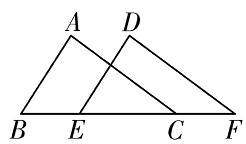


图 2-17-9

3. (2023·台州中考)如图 2-17-10,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=4$,$AD=6$。在边 AD 上取一点 E,使 $BE=BC$,过点 C 作 $CF\perp BE$,垂足为点 F,则 BF 的长为__$2\sqrt{5}$__。

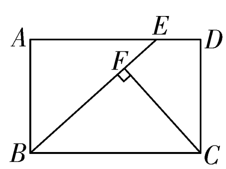


图 2-17-10

4. (2023·随州中考)如图 2-17-11,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AC=8$,$BC=6$,D 为 AC 上一点。若 BD 是$\angle ABC$的平分线,则

$AD=$ __5__。

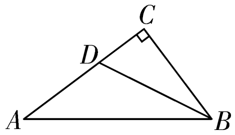


图 2-17-11

5. (2023·重庆中考) 如图 2-17-12，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，点 D 为 BC 上一点，连接 AD。过点 B 作 $BE\perp AD$，垂足为点 E，过点 C 作 $CF\perp AD$ 交 AD 的延长线于点 F。若 $BE=4$，$CF=1$，则 EF 的长度为 __3__。

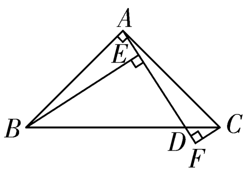


图 2-17-12

6. (2023·黄冈中考) 如图 2-17-13，已知点 $A(3,0)$，点 B 在 y 轴正半轴上，将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 120° 到线段 AC。若点 C 的坐标为 $(7,h)$，则 $h=$ __$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$__。

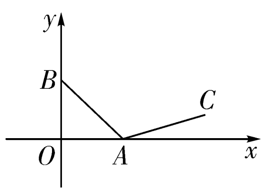


图 2-17-13

7. (2023·江西中考) 如图 2-17-14，$AB=AD$，AC 平分 $\angle BAD$。求证：$\triangle ABC\cong\triangle ADC$。

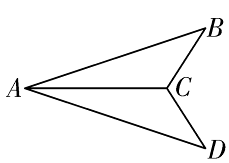


图 2-17-14

证明：∵ AC 平分 $\angle BAD$，

∴ $\angle BAC=\angle DAC$。

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle BAC=\angle DAC,\\ AC=AC,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADC$(SAS)。

8. (2023·内江中考节选) 如图 2-17-15，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，E 是 AD 的中点，过点 A 作 $AF/\!/BC$ 交 CE 的延长线于点 F。求证：$AF=BD$。

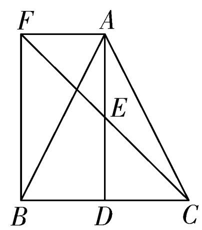


图 2-17-15

证明：∵ $AF/\!/BC$，

∴ $\angle AFE=\angle DCE$。

∵ 点 E 为 AD 的中点，

∴ $AE=DE$，

在 $\triangle EAF$ 和 $\triangle EDC$ 中，

$$\begin{cases}\angle AFE=\angle DCE,\\ \angle AEF=\angle DEC,\\ AE=DE,\end{cases}$$

∴ $\triangle EAF\cong\triangle EDC$(AAS)，

∴ $AF=CD$。

∵ 点 D 是 BC 的中点，

∴ $CD=BD$，

∴ $AF=BD$。

9. (2023·怀化中考节选) 如图 2-17-16，在矩形 $ABCD$ 中，过对角线 BD 的中点 O 作 BD 的垂线 EF，分别交 AD，BC 于点 E，F。证明：$\triangle BOF\cong\triangle DOE$。

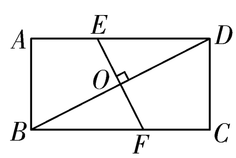


图 2-17-16

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AD/\!/BC$，

∴ $\angle EDO=\angle FBO$。

∵ 点 O 是 BD 的中点，

∴ $DO=BO$。

又∵ $\angle EOD=\angle FOB$，

∴ $\triangle BOF\cong\triangle DOE$(ASA)。

第 18 讲　解直角三角形

重难点突破

重点 1　特殊角的三角函数值的记忆技巧

解直角三角形的应用中要熟记特殊角的三角函数值。一是按值的变化规律去记，正弦逐渐增大，余弦逐渐减小，正切逐渐增大。二是按特殊直角三角形中各边特殊值规律去记：(1)在直角三角形中，设 30°角所对的直角边为 1，则其三边长分别为 1，2，$\sqrt{3}$；(2)在直角三角形中，设 45°角所对的直角边为 1，则其三边长分别为 1，1，$\sqrt{2}$。

重点 2　解直角三角形的实际应用

1. 应用解直角三角形解决实际问题的方法与步骤

(1)构造直角三角形：根据实际问题情境画出直角三角形，若无直角三角形，则需要作垂线构造出直角三角形。

(2)解直角三角形：得到直角三角形后，将题干中的已知量和三角形的边角对应起来，看能否直接求解，若不能，则需要设某一线段长为 x，列方程求解。

2. 应用解直角三角形解决实际问题的注意事项

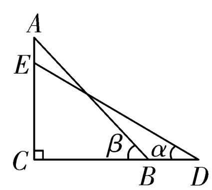
(1)注意仰角、俯角的区别：仰角的视线在水平线上，俯角的视线在水平线下；

(2)注意坡度的实际含义：坡度不是坡角的度数，而是坡角的正切值；

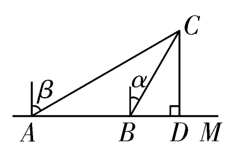
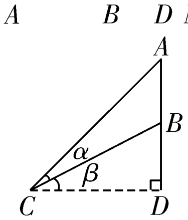
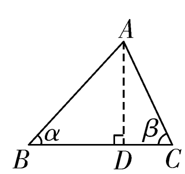
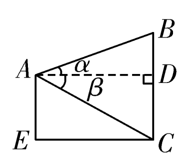
(3)注意方位角的基准线：方位角的基准线是南北方向线，先说南或北，再说偏东或偏西多少度。

重点 3　解直角三角形常用模型

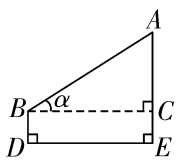
1. 共直角

图形示例	关系式
	求 BD 的长： $BD=CD-BC$ $\left.\begin{array}{l}Rt\triangle CDE\Rightarrow CD\\ Rt\triangle ABC\Rightarrow BC\end{array}\right\}\Rightarrow BD$

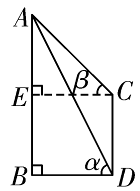
2. 共高作高

图形示例	关系式
	求 AB 的长： $AB=AD-BD$ $\left.\begin{array}{l}Rt\triangle ACD\Rightarrow AD\\ Rt\triangle BCD\Rightarrow BD\end{array}\right\}\Rightarrow AB$
	求 BC 的长： $BC=BD+CD$ $\left.\begin{array}{l}Rt\triangle ABD\Rightarrow BD\\ Rt\triangle ACD\Rightarrow CD\end{array}\right\}\Rightarrow BC$

3. 构造矩形

图形示例	关系式
	求 AE 的长： $AE=AC+CE$ $\left.\begin{aligned}&\mathrm{Rt}\triangle ABC\Rightarrow AC\\&\text{矩形 }BCED\Rightarrow BD\Rightarrow CE\end{aligned}\right\}\Rightarrow AE$

续表

图形示例	关系式
	求 CD 的长： $CD=BE=AB-AE$ $\left.\begin{aligned}&\mathrm{Rt}\triangle AEC\Rightarrow AE\\&\mathrm{Rt}\triangle ABD\Rightarrow AB\end{aligned}\right\}\Rightarrow CD$

经典试题解析

知识点 1 锐角三角函数

例 1 （2023·武汉中考）如图 2-18-1，将 45°的 $\angle AOB$ 按图 2-18-1 摆放在一把刻度尺上，顶点 O 与刻度尺下沿的端点重合，OA 与刻度尺下沿重合，OB 与刻度尺上沿的交点 B 在刻度尺上的读数为 2 cm。若按相同的方式将 37°的 $\angle AOC$ 放置在该刻度尺上，则 OC 与刻度尺上沿的交点 C 在刻度尺上的读数约为 ________ cm。（结果精确到 0.1 cm，参考数据：$\sin 37°\approx0.60$，$\cos 37°\approx0.80$，$\tan 37°\approx0.75$）

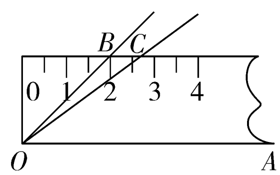


图 2-18-1

思路分析 先构造直角三角形，再利用矩形的性质和锐角三角函数求解。

解答 过点 B 作 $BD\perp OA$，垂足为 D，过点 C 作 $CE\perp OA$，垂足为 E。

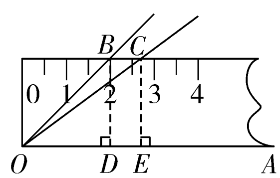


图 2-18-2

在 $\triangle BOD$ 中，$\angle BDO=90°$，$\angle DOB=45°$，

$\therefore BD=OD=2$ cm，

$\therefore CE=BD=2$ cm。

在 $\triangle COE$ 中，$\angle CEO=90°$，$\angle COE=37°$，

$\because \tan 37°=\dfrac{CE}{OE}\approx0.75$。

$\because CE=BD$，$\therefore OE\approx2.7$ cm。

$\therefore OC$ 与刻度尺上沿的交点 C 在刻度尺上的读数约为 2.7 cm。

故答案为 2.7。

知识点 2 解直角三角形：坡度坡角问题

例 2 （2023·天门中考）为了防洪需要，某地决定新建一座拦水坝，如图 2-18-3，拦水坝的横断面为梯形 $ABCD$，斜面坡度 $i=3:4$ 是指坡面的铅直高度 AF 与水平宽度 BF 的比。已知斜坡 CD 的长度为 20 m，$\angle C=18°$，求斜坡 AB 的长。（结果精确到 1 m）（参考数据：$\sin 18°\approx0.31$，$\cos 18°\approx0.85$，$\tan 18°\approx0.32$）

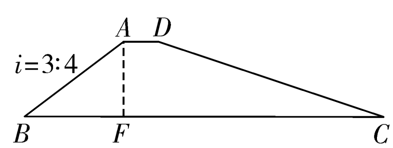


图 2-18-3

思路分析 过点 D 作 $DE\perp BC$，垂足为点 E，在 Rt△DEC 中，利用锐角三角函数求得 DE 的长度，再在 Rt△ABF 中利用勾股定理即可求解。

解 过点 D 作 $DE\perp BC$，垂足为点 E，则四边形 $ADEF$ 是矩形。

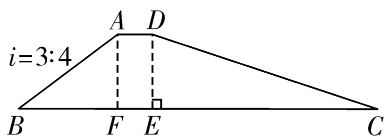


图 2-18-4

在 Rt△DEC 中，$CD=20$，$\angle C=18°$，

$\therefore DE=CD\cdot\sin C=20\times\sin 18°\approx 6.2$，

$\therefore AF=DE\approx 6.2$。

$\because \dfrac{AF}{BF}=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore$ 在 Rt△ABF 中，$AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\dfrac{5}{3}AF\approx\dfrac{5}{3}\times 6.2\approx 10\ (\text{m})$。

答：斜坡 AB 的长约为 10 m。

知识点 3 解直角三角形：仰角俯角问题

例 3 （2023·菏泽中考）无人机在实际生活中的应用越来越广泛。如图 2-18-5，某人利用无人机测量大楼的高度 BC，无人机在空中点 P 处，测得点 P 距地面上 A 点 80 m，点 A 处的俯角为 60°，楼顶 C 点处的俯角为 30°（点 A,B,C,P 在同一平面内）。已知点 A 与大楼的距离 AB 为 70 m，求大楼的高度 BC（结果保留根号）。

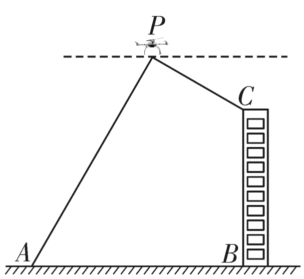


图 2-18-5

思路分析 过 P 作 $PH\perp AB$，垂足为 H，过 C 作 $CG\perp PH$，垂足为 G，而 $CB\perp AB$，则四边形 $CGHB$ 是矩形，先在 Rt△APH 中求出 PH,AH 的长，由此得到 CG 的长，再解 Rt△PGC，得到 PG 的长即可解决问题。

解 如图 2-18-6，过 P 作 $PH\perp AB$，垂足为 H，过 C 作 $CG\perp PH$，垂足为 G，

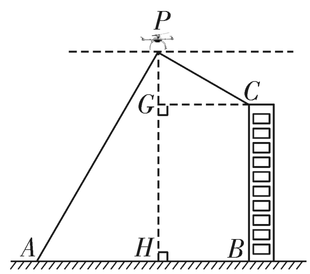


图 2-18-6

则四边形 $CGHB$ 是矩形，

$\therefore GH=BC,BH=CG$，

由题意可得 $AP=80$，$\angle PAH=60°$，$AB=70$，$\angle PCG=30°$，

$\therefore$ 在 Rt△PAH 中，$AH=AP\cdot\cos 60°=80\times\dfrac{1}{2}=40$，

$PH=AP\cdot\sin 60°=80\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$，

$\therefore CG=BH=AB-AH=30$。

在 Rt△PGC 中，$PG=CG\cdot\tan\angle PCG=10\sqrt{3}$，

$\therefore BC=GH=PH-PG=30\sqrt{3}$，

$\therefore$ 大楼的高度 BC 为 $30\sqrt{3}$ m。

知识点 4 解直角三角形：方向角问题

例 4 （2023·重庆中考）为了满足市民的需求，我市在一条小河 AB 两侧开辟了两条长跑锻炼线路，如图 2-18-7；①$A-D-C-B$；②$A-E-B$。经勘测，点 B 在点 A 的正东方，点 C 在点 B 的正北方 10 km 处，点 D

在点 C 的正西方 14 km 处，点 D 在点 A 的北偏东 45° 方向，点 E 在点 A 的正南方，点 E 在点 B 的南偏西 60° 方向。（参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.41$，$\sqrt{3}\approx 1.73$）

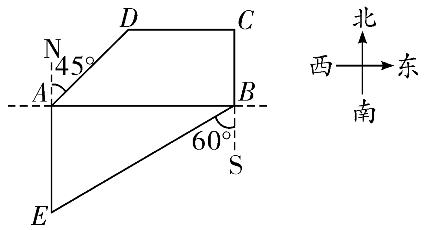


图 2-18-7

（1）求 AD 的长度。（结果精确到 1 km）

（2）由于时间原因，小明决定选择一条较短线路进行锻炼，请计算说明他应该选择线路①还是线路②？

思路分析 （1）过点 D 作 $DF\perp AB$，垂足为点 F，根据题意可得四边形 $BCDF$ 是矩形，进而得出 $DF=BC=10$ km，然后解直角三角形即可；

（2）分别求出线路①和线路②的总路程，比较即可。

解 （1）如图 2-18-8，过点 D 作 $DF\perp AB$，垂足为点 F。

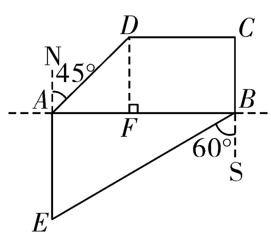


图 2-18-8

由题意可得，四边形 $BCDF$ 是矩形，

$\therefore DF=BC=10$ km。

$\because$ 点 D 在点 A 的北偏东 45° 方向，

$\therefore$ 在 Rt$\triangle DAF$ 中，$\angle DAF=45^\circ$，

$AD=\dfrac{DF}{\sin 45^\circ}=10\sqrt{2}\approx 14$ km。

答：AD 的长度约为 14 km。

（2）由题意可得，$BC=10$ km，$CD=14$ km，

$\therefore$ 路线①的总路程：$AD+DC+BC=10\sqrt{2}+14+10=24+10\sqrt{2}\approx 38$（km）。

$\because DF=BC=10$ km，$\angle DAF=45^\circ$，$\angle DFA=90^\circ$，

$\therefore \triangle DAF$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AF=DF=10$ km，

$\therefore AB=AF+BF=AF+DC=10+14=24$ km，

由题意可得，在 Rt$\triangle AEB$ 中，$\angle E=60^\circ$，

$\therefore AE=\dfrac{AB}{\tan 60^\circ}=8\sqrt{3}$ km，$BE=\dfrac{AB}{\sin 60^\circ}=16\sqrt{3}$ km，

$\therefore$ 路线②的总路程：$AE+BE=8\sqrt{3}+16\sqrt{3}=24\sqrt{3}\approx 42$（km）。

$\because 38<42$，

$\therefore$ 故小明应该选择路线①。

陕西中考链接

1.（2022·陕西中考）如图 2-18-9，AD 是 $\triangle ABC$ 的高。若 $BD=2CD=6$，$\tan C=2$，则边 AB 的长为（ D ）

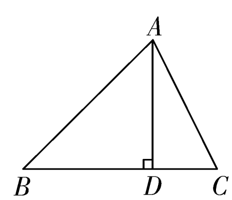


图 2-18-9

A. $3\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{5}$

C. $3\sqrt{7}$　　D. $6\sqrt{2}$

2. (2023・陕西中考)一天晚上,小明和爸爸带着测角仪和皮尺去公园测量一景观灯(灯杆底部不可到达)的高 AB。如图 2-18-10,当小明爸爸站在点 D 处时,他在该景观灯照射下的影子长为 DF,测得 $DF=2.4$ m。当小明站在爸爸影子的顶端 F 处时,测得点 A 的仰角 α 为 $26.6°$。已知爸爸的身高 $CD=1.8$ m,小明眼睛到地面的距离 $EF=1.6$ m,点 F,D,B 在同一条直线上,$EF\perp FB$, $CD\perp FB$, $AB\perp FB$。求该景观灯的高 AB。

(参考数据:$\sin 26.6°\approx0.45$, $\cos 26.6°\approx0.89$, $\tan 26.6°\approx0.50$)

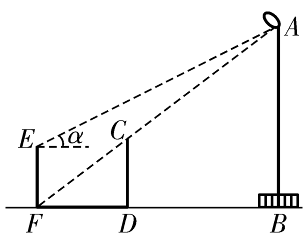
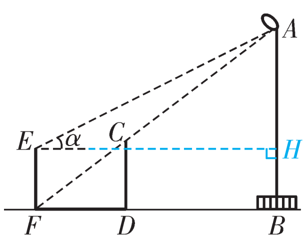


图 2-18-10



解:如图,过点 E 作 $EH\perp AB$,垂足为点 H。

由题意,得 $EH=FB$, $EF=BH=1.6$。

设 $EH=FB=x$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEH$ 中,$\angle AEH=26.6°$,

$\therefore AH=EH\cdot\tan 26.6°\approx0.5x$,

$\therefore AB=AH+BH=0.5x+1.6$。

$\because CD\perp FB, AB\perp FB$,

$\therefore \angle CDF=\angle ABF=90°$。

$\because \angle CFD=\angle AFB$,

$\therefore \triangle CDF\backsim\triangle ABF$,

$\therefore \dfrac{CD}{AB}=\dfrac{DF}{BF}$,即$\dfrac{1.8}{AB}=\dfrac{2.4}{x}$,

$\therefore AB=\dfrac{3}{4}x$,

可得$\dfrac{3}{4}x=0.5x+1.6$,

解得 $x=6.4$,

$\therefore AB=\dfrac{3}{4}x=4.8$,

$\therefore$ 该景观灯的高 AB 约为 4.8 m。

3. (2021・陕西中考)一座吊桥的钢索立柱 AD 两侧各有若干条斜拉的钢索,大致如图 2-18-11 所示。小明和小亮想用测量知识测较长钢索 AB 的长度。他们测得 $\angle ABD=30°$,由于 B,D 两点间的距离不易测得,通过探究和测量,发现 $\angle ACD$ 恰好为 $45°$,点 B 与点 C 之间的距离约为 16 m。已知 B,C,D 共线,$AD\perp BD$。求钢索 AB 的长度。(结果保留根号)

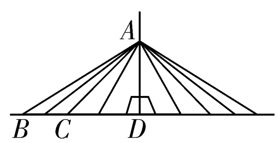


图 2-18-11

解:在$\triangle ADC$ 中,设 $AD=x$,

$\because AD\perp BD$, $\angle ACD=45°$,

$\therefore CD=AD=x$。

在$\triangle ADB$ 中,$AD\perp BD$, $\angle ABD=30°$,

$\therefore AD=BD\cdot\tan 30°$,即 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(16+x)$,

解得 $x=8\sqrt{3}+8$,

$\therefore AB=2AD=2\times(8\sqrt{3}+8)=16\sqrt{3}+16$,

$\therefore$ 钢索 AB 的长度约为$(16\sqrt{3}+16)$m。

核心素养培优

1. (2023·攀枝花中考)如图2-18-12,在平面直角坐标系中,线段 OA 与 x 轴正方向夹角为45°,且 $OA=2$。若将线段 OA 绕点 O 沿逆时针方向旋转105°到线段 OA',则此时点 A' 的坐标为　　　　(　C　)

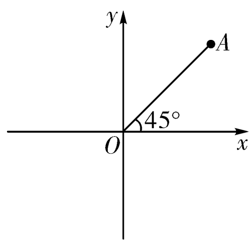


图 2-18-12

A. $(\sqrt{3},-1)$　　　B. $(-1,\sqrt{3})$

C. $(-\sqrt{3},1)$　　　D. $(1,-\sqrt{3})$

2. (2023·十堰中考)如图2-18-13,有一天桥高 AB 为5 m,BC 是通向天桥的斜坡,$\angle ACB=45°$,市政部门启动"陡改缓"工程,决定将斜坡的底端 C 延伸到 D 处,使 $\angle D=30°$,则 CD 的长度约为(参考数据:$\sqrt{2}\approx1.414$,$\sqrt{3}\approx1.732$)　　　　(　D　)

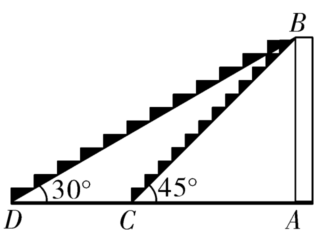


图 2-18-13

A. 1.59 m　　　B. 2.07 m

C. 3.55 m　　　D. 3.66 m

3. (2023·广西中考)如图2-18-14,焊接一个钢架,包括底角为37°的等腰三角形外框和3 m高的支柱,则共需钢材约__21__m。(结果取整数。参考数据:$\sin37°\approx0.60$,$\cos37°\approx0.80$,$\tan37°\approx0.75$)

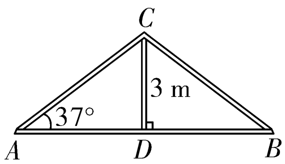


图 2-18-14

4. (2023·广元中考)如图2-18-15,在平面直角坐标系中,已知点 $A(1,0)$,点 $B(0,-3)$,点 C 在 x 轴上,且点 C 在点 A 右侧,连接 AB,BC。若 $\tan\angle ABC=\frac{1}{3}$,则点 C 的坐标为__$\left(\frac{9}{4},0\right)$__。

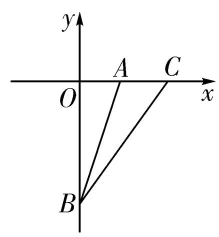


图 2-18-15

5. (2023·临沂中考)如图2-18-16,灯塔 A 周围9 n mile内有暗礁。一渔船由东向西航行至 B 处,测得灯塔 A 在北偏西58°方向上,继续航行6 n mile后到达 C 处,测得灯塔 A 在西北方向上。如果渔船不改变航线继续向西航行,有没有触礁的危险?(参考数据:$\sin32°\approx0.530$,$\cos32°\approx0.848$,$\tan32°\approx0.625$;$\sin58°\approx0.848$,$\cos58°\approx0.530$,$\tan58°\approx1.6$)

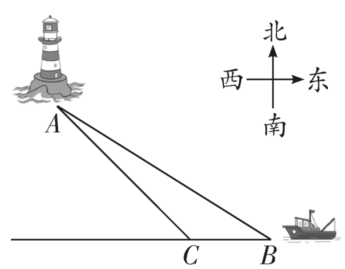
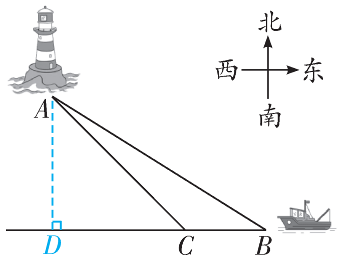


图 2-18-16

解:过点 A 作 $AD\perp BC$,由题意,得 $\angle ABC$

$=90°-58°=32°$，$\angle ACD=45°$，$BC=6$，设 $AD=x$，



在 Rt△ADC 中，$\angle ACD=45°$，

∴ $AD=CD=x$，

∴ $BD=x+6$。

在 Rt△ADB 中，$\tan\angle ABD=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{x}{x+6}\approx 0.625$，

解得 $x\approx 10$，

∴ $AD\approx 10$。

∵ $10>9$，

∴ 渔船没有触礁的危险。

6. （2023・随州中考）某校学生开展综合实践活动，测量某建筑物的高度 AB，在建筑物附近有一斜坡，坡长 $CD=10$ m，坡角 $\alpha=30°$，小华在 C 处测得建筑物顶端 A 的仰角为 $60°$，在 D 处测得建筑物顶端 A 的仰角为 $30°$。（已知点 A，B，C，D 在同一平面内，B，C 在同一水平线上）

（1）求点 D 到地面 BC 的距离；

（2）求该建筑物的高度 AB。

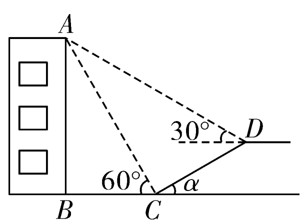


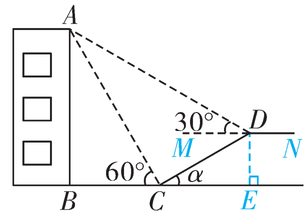
图 2-18-17

解：（1）如图，过点 D 作 $DE\perp BC$，垂足为点 E。

由题意可得 $\angle DCE=30°$，

∴ 在 Rt△CDE 中，$DE=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{1}{2}\times 10=5$，

即点 D 到地面 BC 的距离为 5 m。



（2）如图，由题意可得 $\angle DCE=30°$，$\angle ACB=60°$，

∴ $\angle ACD=90°$。

又∵ $MN\parallel BE$，

∴ $\angle MDC=\angle\alpha=30°$，

∴ $\angle ADC=60°$，

∴ 在 Rt△ACD 中，$\tan\angle ADC=\dfrac{AC}{CD}=\sqrt{3}$，

即 $\dfrac{AC}{10}=\sqrt{3}$，解得 $AC=10\sqrt{3}$。

在 Rt△ABC 中，$\sin\angle ACB=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\dfrac{AB}{10\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $AB=15$。

答：该建筑物的高度 AB 为 15 m。

7. （2023・安徽中考）如图 2-18-18，O，R 是同一水平线上的两点，无人机从 O 点竖直上升到 A 点时，测得 A 到 R 点的距离为 40 m，R 点的俯角为 $24.2°$，无人机继续竖直上升到 B 点，测得 R 点的俯角为 $36.9°$。求无人机从 A 点到 B 点的上升高度 AB。（精确到 0.1 m 。参考数据：$\sin 24.2°\approx 0.41$，$\cos 24.2°\approx 0.91$，$\tan 24.2°\approx 0.45$；$\sin 36.9°$

≈ 0.60, $\cos 36.9° \approx 0.80$, $\tan 36.9° \approx 0.75$）

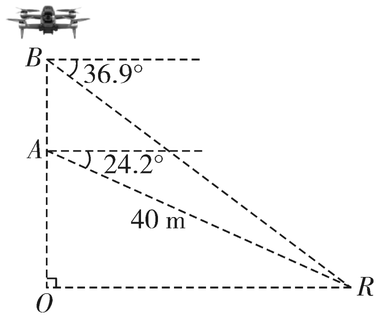


图 2-18-18

解：依题意，得 $\angle ARO = 24.2°$，$\angle BRO = 36.9°$，$AR = 40$。

在 Rt△AOR 中，$\angle ARO = 24.2°$，

$\therefore AO = AR \cdot \sin\angle ARO = 40 \times \sin 24.2° \approx 16.4$，$RO = AR \cdot \cos\angle ARO = 40 \times \cos 24.2° \approx 36.4$。

在 Rt△BOR 中，$OB = OR \cdot \tan\angle BRO \approx 27.3$，

$\therefore AB = BO - AO \approx 10.9$(m)。

答：无人机从 A 点到 B 点的上升高度 AB 约为 10.9 m。

8.（2023・绍兴中考）图 2-18-19①是某款篮球架，图 2-18-19②是其示意图，立柱 OA 垂直地面 OB，支架 CD 与 OA 交于点 A，支架 $CG \perp CD$ 交 OA 于点 G，支架 DE 平行于地面 OB，篮框 EF 与支架 DE 在同一直线上，$OA = 2.5$ m，$AD = 0.8$ m，$\angle AGC = 32°$。

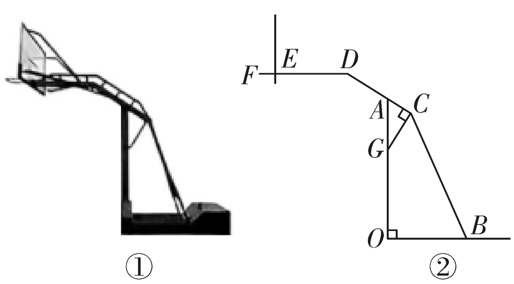


图 2-18-19

（1）求 $\angle GAC$ 的度数。

（2）某运动员准备给篮框挂上篮网，如果他站在凳子上，最高可以把篮网挂到离地面 3 m 处，那么他能挂上篮网吗？请通过计算说明理由。（参考数据：$\sin 32° \approx 0.53$，$\cos 32° \approx 0.85$，$\tan 32° \approx 0.62$）

解：（1）$\because CG \perp CD$，

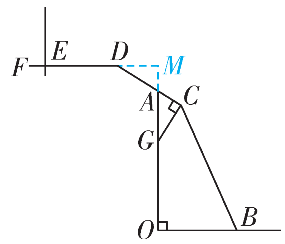
$\therefore \angle ACG = 90°$。

$\because \angle AGC = 32°$，

$\therefore \angle GAC = 90° - 32° = 58°$。

（2）该运动员能挂上篮网，理由如下：

如图，延长 OA，ED 交于点 M。



$\because OA \perp OB$，$DE /\!/ OB$，

$\therefore \angle DMA = 90°$。

又$\because \angle DAM = \angle GAC = 58°$，

$\therefore \angle ADM = 32°$。

在 Rt△ADM 中，$AM = AD \cdot \sin 32° \approx 0.8 \times 0.53 = 0.424$，

$\therefore OM = OA + AM = 2.5 + 0.424 = 2.924 < 3$，

$\therefore$ 该运动员能挂上篮网。

第 19 讲　多边形与平行四边形

重难点突破

重点 1　多边形的内角与外角

1. 多边形内角和定理：n 边形内角和等于$(n-2)\cdot 180^\circ(n\geqslant 3$ 且 n 为整数$)$，此公式推导的基本方法是从 n 边形的一个顶点出发引出$(n-3)$条对角线，从而将 n 边形分割为$(n-2)$个三角形，这$(n-2)$个三角形的所有内角之和正好是 n 边形的内角和。正多边形的每个内角相等，因此每个内角的度数只需用内角和除以边数即可。

2. 多边形的外角和都等于 360°，每一个外角与相邻的内角互补，因此多边形外角和等于 $180^\circ\cdot n-(n-2)\cdot 180^\circ=360^\circ$。正多边形的每个外角相等，在求正多边形内角度数时，亦可先求外角度数，再利用外角与内角互补求解。

重点 2　与平行四边形有关的计算和证明

1. 平行四边形判定方法的选择

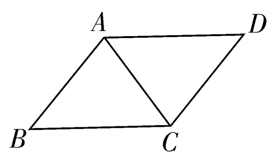
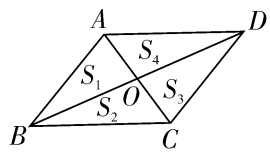
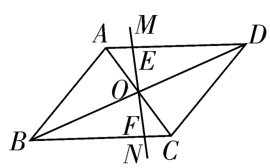
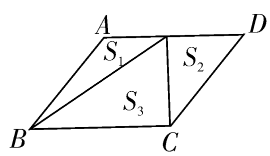
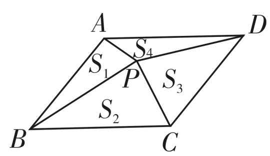
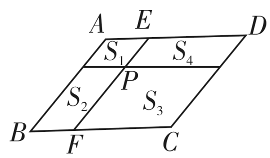
基本思路：(1)若已知一组对边相等，可以证明这组对边平行或另一组对边相等；

(2)若已知一组对边平行，可以证明这组对边相等或另一组对边平行；

(3)若已知一组对角相等，可以证明另一组对角相等；

(4)若已知条件与对角线有关，可以证明对角线互相平分。

2. 有关平行四边形面积的结论

图示	结论
	$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$
	$S_1=S_2=S_3=S_4=\frac{1}{4}S_{\square ABCD}$
	$S_{四边形ABFE}=S_{四边形CDEF}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$
	$S_1+S_2=S_3=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$
	$S_1+S_3=S_2+S_4=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$
	$\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_4}{S_3}$

经典试题解析

知识点 1　多边形的内角和与外角和

例 1　（2023·枣庄中考）如图 2-19-1，一束太阳光线平行照射在放置于地面的正六边形上。若$\angle 1=44°$，则$\angle 2$的度数为（　　）

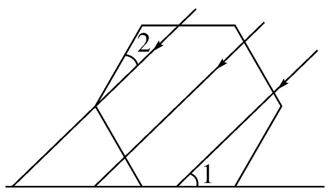


图 2-19-1

A. $14°$　B. $16°$　C. $24°$　D. $26°$

思路分析　先求出正六边形的一个内角和一个外角的度数，得到$\angle 4=60°$，$\angle 2+\angle 5=120°$，再根据平行线的性质，得到$\angle 3=\angle 1=44°$，根据三角形外角的性质，得到$\angle 5=\angle 3+\angle 4=104°$，进而求出$\angle 2$的度数。

解答　$\because$ 正六边形的一个外角的度数为$\dfrac{360°}{6}=60°$，

$\therefore$ 正六边形的一个内角的度数为$180°-60°=120°$，

即$\angle 4=60°$，$\angle 2+\angle 5=120°$。

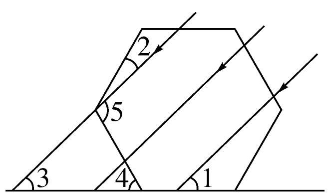


图 2-19-2

$\because$ 一束太阳光线平行照射在放置于地面的正六边形上，$\angle 1=44°$，

$\therefore \angle 3=\angle 1=44°$，

$\therefore \angle 5=\angle 3+\angle 4=104°$，

$\therefore \angle 2=120°-\angle 5=16°$。

故选 B。

知识点 2　平行四边形的性质

例 2　（2023·乐山中考）如图 2-19-3，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是线段 AB 上一点，连接 AC，DE 交于点 F。若$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{2}{3}$，则$\dfrac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}}=$________。

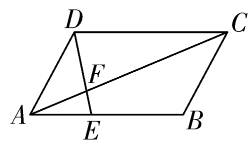


图 2-19-3

思路分析　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则可根据 $AB\parallel CD$，证明$\triangle EAF\backsim\triangle DCF$，得到$\dfrac{DF}{EF}=\dfrac{CD}{AE}=\dfrac{AB}{AE}$，由$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{2}{3}$得到$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{5}{2}$，进而得$\dfrac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}}=\dfrac{5}{2}$。

解答　$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$AB\parallel CD$，

$\therefore \angle AEF=\angle CDF$，$\angle EAF=\angle DCF$，

$\therefore \triangle EAF\backsim\triangle DCF$，

$\therefore \dfrac{DF}{EF}=\dfrac{CD}{AE}=\dfrac{AB}{AE}$。

$\because \dfrac{AE}{EB}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{5}{2}$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}}=\dfrac{DF}{EF}=\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{5}{2}$。

故答案为$\dfrac{5}{2}$。

知识点3 平行四边形的判定

例3 (2023·株洲中考)如图 2-19-4,在△ABC 中,点 D,E 分别为 AB,AC 的中点,点 H 在线段 CE 上,连接 BH,点 G,F 分别为 BH,CH 的中点。

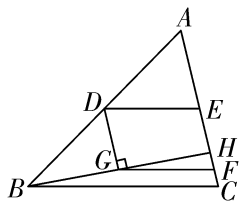


图 2-19-4

(1)求证:四边形 $DEFG$ 为平行四边形;

(2)若 $DG\perp BH,BD=3,EF=2$,求线段 BG 的长度。

思路分析 (1)由三角形中位线定理得到 $DE\parallel BC,DE=\dfrac{1}{2}BC,GF\parallel BC,GF=\dfrac{1}{2}BC$,则 $GF\parallel DE,GF=DE$,即可证明四边形 $DEFG$ 为平行四边形;

(2)由四边形 $DEFG$ 为平行四边形得到 $DG=EF=2$,由 $DG\perp BH$ 得到 $\angle DGB=90°$,由勾股定理即可得到线段 BG 的长度。

解 (1)证明:$\because$ 点 D,E 分别为 AB,AC 的中点,

$\therefore DE\parallel BC,DE=\dfrac{1}{2}BC$。

$\because$ 点 G,F 分别为 BH,CH 的中点。

$\therefore GF\parallel BC,GF=\dfrac{1}{2}BC$,

$\therefore GF\parallel DE,GF=DE$,

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 为平行四边形;

(2)解:$\because$ 四边形 $DEFG$ 为平行四边形,

$\therefore DG=EF=2$。

$\because DG\perp BH$,

$\therefore \angle DGB=90°$。

$\because BD=3$,

$\therefore BG=\sqrt{BD^2-DG^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$。

陕西中考链接

1.(2020·陕西中考)如图 2-19-5,在▱$ABCD$ 中,$AB=5,BC=8$。E 是边 BC 的中点,F 是▱$ABCD$ 内一点,且 $\angle BFC=90°$。连接 AF 并延长,交 CD 于点 G。若 $EF\parallel AB$,则 DG 的长为 (D)

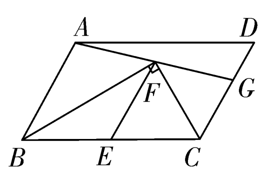


图 2-19-5

A. $\dfrac{5}{2}$ B. $\dfrac{3}{2}$ C. 3 D. 2

2.(2023·陕西中考)如图 2-19-6,正八边形的边长为 2,对角线 AB,CD 相交于点 E,则线段 BE 的长为__$2+\sqrt{2}$__。

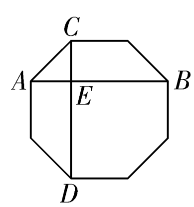


图 2-19-6

3.(2021·陕西中考)正九边形一个内角的度数为__140°__。

核心素养培优

1. (2023·临沂中考)将一个正六边形绕其中心旋转后仍与原图形重合,旋转角的大小不可能是 (B)

A. 60° B. 90° C. 180° D. 360°

2. (2023·随州中考)如图 2-19-7,在▱$ABCD$ 中,分别以 B,D 为圆心,大于$\frac{1}{2}BD$ 的长为半径画弧,两弧相交于点 M,N,过 M,N 两点作直线交 BD 于点 O,交 AD,BC 于点 E,F,下列结论不正确的是 (D)

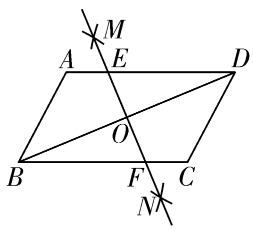


图 2-19-7

A. $AE=CF$ B. $DE=BF$

C. $OE=OF$ D. $DE=DC$

3. (2023·株洲中考)如图 2-19-8,在平行四边形 $ABCD$ 中,$AB=3$,$BC=5$,$\angle B$ 的平分线 BE 交 AD 于点 E,则 DE 的长为__2__。

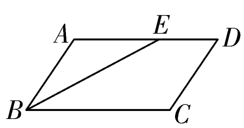


图 2-19-8

4. (2023·临沂中考)如图 2-19-9,在三角形纸片 ABC 中,$AC=6$,$BC=9$,分别沿与 BC,AC 平行的方向,从靠近 A 的 AB 边的三等分点剪去两个角,得到的平行四边形纸片的周长是__14__。

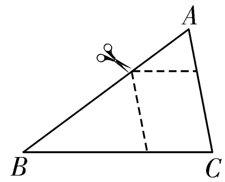


图 2-19-9

5. (2023·聊城中考)如图 2-19-10,在▱$ABCD$ 中,BC 的垂直平分线 EO 交 AD 于点 E,交 BC 于点 O,连接 BE,CE,过点 C 作 $CF\parallel BE$,交 EO 的延长线于点 F,连接 BF。若 $AD=8$,$CE=5$,则四边形 $BFCE$ 的面积为__24__。

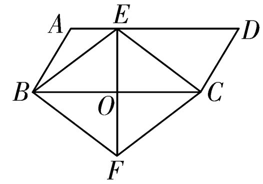


图 2-19-10

6. (2023·菏泽中考)如图 2-19-11,在▱$ABCD$ 中,AE 平分 $\angle BAD$,交 BC 于点 E;CF 平分 $\angle BCD$,交 AD 于点 F。求证:$AE=CF$。

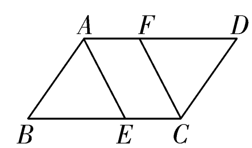


图 2-19-11

证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB=CD$,$\angle BAD=\angle BCD$,$\angle B=\angle D$。

∵ AE 平分 $\angle BAD$,CF 平分 $\angle BCD$,

∴ $\angle BAE=\angle FCD$。

在△ABE 与△CDF 中,$\begin{cases}\angle BAE=\angle DCF,\\ AB=CD,\\ \angle B=\angle D,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$(ASA),

∴ $AE=CF$。

7.（2023·杭州中考）如图2-19-12，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F 在对角线 BD 上，且 $BE=EF=FD$，连接 AE，EC，CF，FA。

（1）求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形；

（2）若 $\triangle ABE$ 的面积等于2，求 $\triangle CFO$ 的面积。

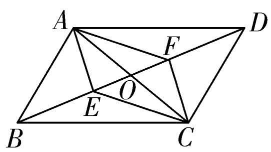


图 2-19-12

（1）证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA=OC$，$OB=OD$。

∵ $BE=FD$，

∴ $OB-BE=OD-FD$，

∴ $OE=OF$，

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形。

（2）解：∵ $S_{\triangle ABE}=2$，$BE=EF$，

∴ $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABE}=2$。

∵ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

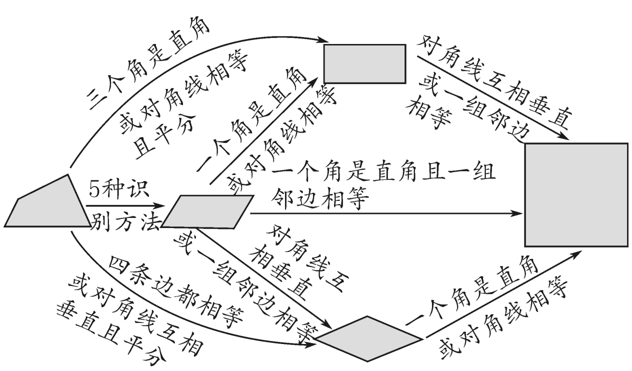
∴ $S_{\triangle CFO}=\frac{1}{2}S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\times 2=1$。

第20讲　矩形、菱形和正方形

重难点突破

重点1　矩形、菱形、正方形之间的判定关系

进行矩形、菱形、正方形的判定时，要注意建立起点四边形（题目中已知的四边形）与结论四边形（题目中需要证明的四边形）的几何直观，找到两者之间的差异条件。给起点四边形加上差异条件就可以判定出结论四边形，判定思路如下：



重点2　与矩形、菱形、正方形有关的计算

1. 运用矩形性质计算常见问题的一般思路：根据矩形的四个角都是直角，一条对角线将矩形分成两个直角三角形，可用勾股定理或锐角三角函数求线段的长，因为矩形对角线相等且互相平分，故可借助对角线的关系得到全等的三角形，矩形的两条对角线把矩形分成四个等腰三角形，利用这个结论可建立线段和角度之间的等量关系。

2. 与菱形有关的计算常涉及两种情况：（1）求长度（线段长或周长）时，常使用等腰三角形的性质，同时也应注意使用勾股定理、直角三角形斜边的中线等于斜边的一半或含特殊角的三角函数等进行计算；（2）求

面积时，可利用菱形的两条对角线互相垂直，菱形的面积等于对角线之积的一半进行计算。

3. 在正方形问题中，一般可以通过证明三角形全等来证明两条线段相等，也可以利用正方形的角是直角来构造直角三角形，利用勾股定理解题。在正方形中，也常用对角线互相垂直平分证明线段相等。

重点3 矩形、菱形、正方形的轴对称和中心对称性质

矩形、菱形、正方形既是轴对称图形又是中心对称图形，也就是说这三种图形既可以沿着对称轴翻折全等，也可以绕着中心点旋转180°而全等，这也是图形全等变换中的两种最基本的形式。因此，在解决问题时，要注重运用图形的对称性来思考问题。如证明三角形的全等、线段最值的计算等。

经典试题解析

知识点1 矩形的性质与判定

例1 (2023·大庆中考)如图2-20-1，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 为线段 CD 的中点，连接 AC，AE，延长 AE，BC 交于点 F，连接 DF，$\angle ACF=90°$。

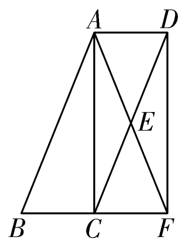


图 2-20-1

(1)求证：四边形 $ACFD$ 是矩形；

(2)若 $CD=13$，$CF=5$，求四边形 $ABCE$ 的面积。

思路分析 (1)根据平行四边形的性质得 $AD\parallel BC$，$\angle DAF=\angle AFC$，$\angle ADC=\angle DCF$，证明 $\triangle ADE\cong\triangle FCE$，再根据矩形的判定即可证明；

(2)利用勾股定理求出 DF 的长，再根据面积公式计算即可。

解 (1)证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD\parallel BC$，

∴ $\angle DAF=\angle AFC$，$\angle ADC=\angle DCF$。

∵ E 为线段 CD 的中点，

∴ $DE=CE$，

∴ $\triangle ADE\cong\triangle FCE$(AAS)，

∴ $AE=EF$，

∴ 四边形 $ACFD$ 是平行四边形。

∵ $\angle ACF=90°$，

∴ 平行四边形 $ACFD$ 是矩形。

(2)解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC$，$AB=CD=13$。

∵ 四边形 $ACFD$ 是矩形，

∴ $AD=CF=5$，$AC=DF$，$AE=EF$，

∴ $AD=BC=CF=5$。

∵ $CD=13$，

∴ $DF=AC=\sqrt{CD^2-CF^2}=12$，

∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACF}=\dfrac{1}{2}\times BC\times AC=30$。

$\because S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACF}=15$,

$\therefore S_{四边形ABCE}=S_{\triangle AEC}+S_{\triangle ABC}=45$,

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 的面积为 45。

知识点 2 菱形的性质与判定

例 2 (2023·凉山州中考)如图 2-20-2,在▱$ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O,$\angle CAB=\angle ACB$,过点 B 作 $BE\perp AB$ 交 AC 于点 E。

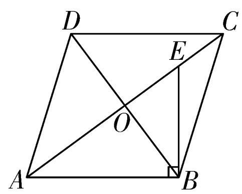


图 2-20-2

(1)求证:$AC\perp BD$;

(2)若 $AB=10$,$AC=16$,求 OE 的长。

思路分析 (1)证明 $AB=CB$,从而可证平行四边形 $ABCD$ 是菱形,即可得证;

(2)根据勾股定理得 $OB=6$,再证 $\triangle EBO\backsim\triangle BAO$,可得$\frac{EO}{BO}=\frac{BO}{AO}$,即可求解。

解 (1)证明:$\because \angle CAB=\angle ACB$,

$\therefore AB=CB$。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC\perp BD$。

(2)解:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA=\frac{1}{2}AC=8$。

$\because AC\perp BD$,$BE\perp AB$,

$\therefore \angle AOB=\angle BOE=\angle ABE=90^\circ$,

$\therefore OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$。

$\because \angle EBO+\angle BEO=90^\circ$,$\angle ABO+\angle EBO=90^\circ$,

$\therefore \angle BEO=\angle ABO$,

$\therefore \triangle EBO\backsim\triangle BAO$,

$\therefore \frac{EO}{BO}=\frac{BO}{AO}$,即 $\frac{EO}{6}=\frac{6}{8}$,

解得 $OE=\frac{9}{2}$。

知识点 3 正方形的性质与判定

例 3 (2023·十堰中考)如图 2-20-3,平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于点 O,分别以点 B,C 为圆心,$\frac{1}{2}AC$,$\frac{1}{2}BD$ 长为半径画弧,两弧交于点 P,连接 BP,CP。

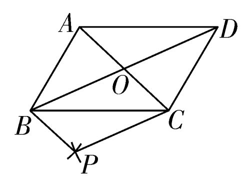


图 2-20-3

(1)试判断四边形 $BPCO$ 的形状,并说明理由;

(2)请说明当▱$ABCD$ 的对角线满足什么条件时,四边形 $BPCO$ 是正方形?

思路分析 (1)根据平行四边形的性质得到 $BP=\frac{1}{2}AC=OC$,$CP=\frac{1}{2}BD=OB$,根据两组对边分别相等的四边形是平行四边形判定即可;

(2)根据对角线相等且垂直平分的四边形是正方形判定即可。

解 (1)四边形 $BPCO$ 是平行四边形。理由如下:

$\because$ ▱$ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于点 O,

$\therefore AO=OC$,$BO=OD$。

$\because$ 以点 B,C 为圆心,$\frac{1}{2}AC$,$\frac{1}{2}BD$ 长为半

径画弧，两弧交于点 P，

$\therefore BP=\frac{1}{2}AC=OC, CP=\frac{1}{2}BD=OB$，

$\therefore$ 四边形 $BPCO$ 是平行四边形。

(2) 当 $AC=BD$ 且 $AC\perp BD$ 时，四边形 $BPCO$ 是正方形。

理由如下：由 (1) 知，$AO=OC=\frac{1}{2}AC$，$BO=OD=\frac{1}{2}BD$，

又 $\because AC=BD$，

$\therefore BO=CO$。

$\because$ 四边形 $BPCO$ 是平行四边形，

$\therefore$ 平行四边形 $BPCO$ 是菱形。

$\because AC\perp BD$，

$\therefore \angle BOC=90°$，

$\therefore$ 菱形 $BPCO$ 是正方形。

陕西中考链接

1. (2022 · 陕西中考) 在下列条件中，能够判定▱$ABCD$ 为矩形的是 (D)

A. $AB=AC$ B. $AC\perp BD$

C. $AB=AD$ D. $AC=BD$

2. (2021 · 陕西中考) 如图 2-20-4，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，连接 AC, BD，则 $\frac{AC}{BD}$ 的值为 (D)

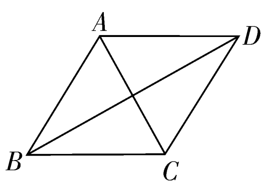


图 2-20-4

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. (2023 · 陕西中考) 点 E 是菱形 $ABCD$ 的对称中心，$\angle B=56°$，连接 AE，则 $\angle BAE$ 的度数为 <u>62°</u>。

4. (2023 · 陕西中考) 如图 2-20-5，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$。点 E 在边 AD 上，且 $ED=3$，M, N 分别是边 AB, BC 上的动点，且 $BM=BN$，P 是线段 CE 上的动点，连接 PM, PN。若 $PM+PN=4$，则线段 PC 的长为 <u>$2\sqrt{2}$</u>。

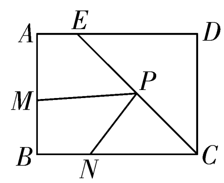


图 2-20-5

5. (2022 · 陕西中考) 如图 2-20-6，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BD=7$。若 M, N 分别是边 AD, BC 上的动点，且 $AM=BN$，作 $ME\perp BD$，$NF\perp BD$，垂足分别为 E, F，则 $ME+NF$ 的值为 <u>$\frac{\sqrt{15}}{2}$</u>。

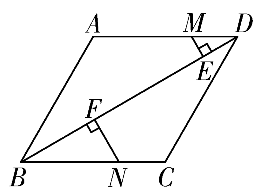


图 2-20-6

核心素养培优

1. (2023 · 乐山中考)如图 2-20-7,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O,E 为边 BC 的中点,连接 OE。若 $AC=6$,$BD=8$,则 $OE=$ (B)

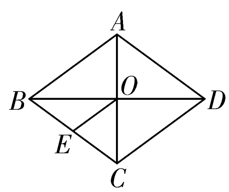


图 2-20-7

A. 2　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. 4

2. (2023 · 上海中考)在四边形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,$AB=CD$。下列说法能使四边形 $ABCD$ 为矩形的是 (C)

A. $AB/\!/CD$　　B. $AD=BC$

C. $\angle A=\angle B$　　D. $\angle A=\angle D$

3. (2022 · 德阳中考)如图 2-20-8,在四边形 $ABCD$ 中,点 E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 边上的中点,则下列结论一定正确的是 (C)

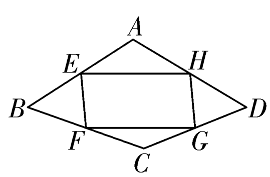


图 2-20-8

A. 四边形 $EFGH$ 是矩形

B. 四边形 $EFGH$ 的内角和小于四边形 $ABCD$ 的内角和

C. 四边形 $EFGH$ 的周长等于四边形 $ABCD$ 的对角线长度之和

D. 四边形 $EFGH$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$

4. (2022 · 达州中考)如图 2-20-9,点 E 在矩形 $ABCD$ 的边 AB 上,将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折,点 A 恰好落在 BC 边上的点 F 处。若 $CD=3BF$,$BE=4$,则 AD 的长为 (C)

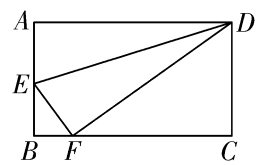


图 2-20-9

A. 9　　B. 12　　C. 15　　D. 18

5. (2022 · 重庆中考)如图 2-20-10,在正方形 $ABCD$ 中,AE 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 E,点 F 是边 AB 上一点,连接 DF。若 $BE=AF$,则 $\angle CDF$ 的度数为 (C)

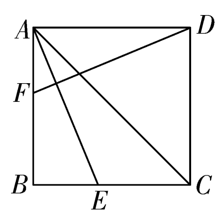


图 2-20-10

A. $45°$　　B. $60°$

C. $67.5°$　　D. $77.5°$

6. (2023 · 宜宾中考)如图 2-20-11,边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中,M 为对角线 BD 上的一点,连接 AM 并延长交 CD 于点 P。若 $PM=PC$,则 AM 的长为 (C)

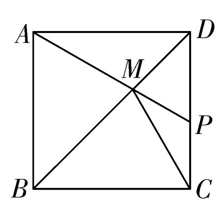


图 2-20-11

A. $3(\sqrt{3}-1)$　　　B. $3(3\sqrt{3}-2)$

C. $6(\sqrt{3}-1)$　　　D. $6(3\sqrt{3}-2)$

7. (2023 · 武威中考)如图 2-20-12,菱形 $ABCD$ 中,$\angle DAB=60°$,$BE\perp AB$,$DF\perp CD$,垂足分别为 B,D。若 $AB=6$ cm,则 $EF=$ __$2\sqrt{3}$__ cm。

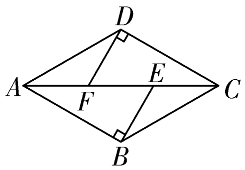


图 2-20-12

8. (2022 · 娄底中考)菱形 $ABCD$ 的边长为 2,$\angle ABC=45°$,点 P,Q 分别是 BC,BD 上的动点,$CQ+PQ$ 的最小值为 __$\sqrt{2}$__。

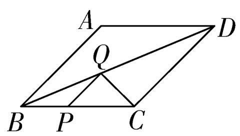


图 2-20-13

9. (2023 · 内江中考)出入相补原理是我国古代数学的重要成就之一,最早是由三国时期数学家刘徽创建。“将一个几何图形,任意切成多块小图形,几何图形的总面积保持不变,等于所分割成的小图形的面积之和”是该原理的重要内容之一。如图 2-20-14,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=5$,$AD=12$,对角线 AC 与 BD 交于点 O,点 E 为 BC 边上的一个动点,$EF\perp AC$,$EG\perp BD$,垂足分别为点 F,G,则 $EF+EG=$ __$\dfrac{60}{13}$__。

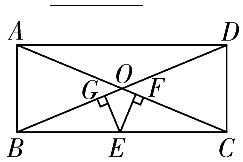


图 2-20-14

10. (2023 · 云南中考)如图 2-20-15,平行四边形 $ABCD$ 中,AE,CF 分别是 $\angle BAD$,$\angle BCD$ 的平分线,且 E,F 分别在边 BC,AD 上,$AE=AF$。

(1)求证:四边形 $AECF$ 是菱形;

(2)若 $\angle ABC=60°$,$\triangle ABE$ 的面积等于 $4\sqrt{3}$,求平行线 AB 与 DC 间的距离。

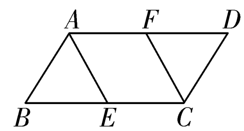


图 2-20-15

(1)证明:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD// BC$,$\angle BAD=\angle BCD$,

$\therefore \angle BEA=\angle DAE$。

$\because AE$,CF 分别是 $\angle BAD$,$\angle BCD$ 的平分线,

$\therefore \angle BAE=\angle DAE=\dfrac{1}{2}\angle BAD$,$\angle BCF=\angle DCF=\dfrac{1}{2}\angle BCD$,

$\therefore \angle DAE=\angle BCF=\angle BEA$,

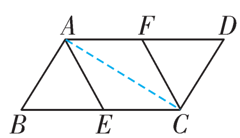
$\therefore AE// FC$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形。

$\because AE=AF$,

$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 是菱形。

(2)解:如图,连接 AC。



$\because AD// BC$,$\angle ABC=60°$,

$\therefore \angle BAD=180°-\angle ABC=120°$,

$\therefore \angle BAE=\angle DAE=\angle ABC=60°$。

$\because$ 四边形 $AECF$ 是菱形,

$\therefore \angle EAC=\dfrac{1}{2}\angle DAE=30°$,

$\therefore \angle BAC=\angle BAE+\angle EAC=90°$,

$\therefore AC \perp AB$，$\angle ACB = 90° - \angle ABC = 30° = \angle EAC$，

$\therefore AE = CE$，$\tan \angle ACB = \tan 30° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore AB = \dfrac{\sqrt{3}}{3}AC$。

$\because \angle BAE = \angle ABC$，

$\therefore AE = BE = CE$。

$\because \triangle ABE$ 的面积等于 $4\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot AB = \dfrac{1}{2}AC \times \dfrac{\sqrt{3}}{3}AC = \dfrac{\sqrt{3}}{6}AC^2 = 8\sqrt{3}$，解得 $AC = 4\sqrt{3}$，

$\therefore$ 平行线 AB 与 DC 间的距离 $AC = 4\sqrt{3}$。

11.（2023·岳阳中考）如图 2-20-16，点 M 在▱$ABCD$ 的边 AD 上，$BM = CM$，请从以下三个选项中①$\angle 1 = \angle 2$；②$AM = DM$；③$\angle 3 = \angle 4$，选择一个合适的选项作为已知条件，使▱$ABCD$ 为矩形。

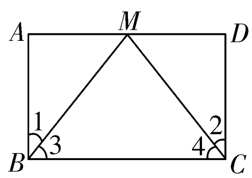


图 2-20-16

（1）你添加的条件是__①或②__（填序号）；

（2）添加条件后，请证明▱$ABCD$ 为矩形。

解：（2）添加条件①，▱$ABCD$ 为矩形，理由如下：

$\because BM = CM$，

$\therefore \angle 3 = \angle 4$，又 $\angle 1 = \angle 2$，

$\therefore \angle ABC = \angle BCD$。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AB /\!/ CD$，

$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180°$，

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 90°$，

$\therefore$ ▱$ABCD$ 为矩形；

添加条件②，▱$ABCD$ 为矩形，理由如下：

在▱$ABCD$ 中，$AB = CD$，$AB /\!/ CD$。

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle DCM$ 中，$\begin{cases} AB = CD, \\ AM = DM, \\ BM = CM, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle DCM$（SSS），

$\therefore \angle A = \angle D$。

又 $\because AB /\!/ CD$，

$\therefore \angle A + \angle D = 180°$，

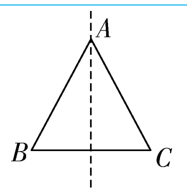
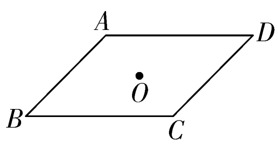
$\therefore \angle A = \angle D = 90°$，

$\therefore$ ▱$ABCD$ 为矩形。

第 21 讲　图形的变换

重难点突破

重点 1　轴对称图形与中心对称图形的区别

<table>
<tr><td>分类</td><td>轴对称图形</td><td>中心对称图形</td></tr>
<tr><td>图示</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>判断方法</td><td>(1)有对称轴——直线;
(2)图形可沿对称轴折叠;
(3)对称轴两旁的部分完全重合</td><td>(1)有对称中心——点;
(2)图形可绕对称中心旋转 180°;
(3)旋转前后的图形完全重合</td></tr>
<tr><td colspan="3">常见的轴对称图形:等腰三角形、等边三角形、菱形、矩形、正方形、圆等;
常见的中心对称图形:平行四边形、圆等;
常见的既是轴对称图形又是中心对称图形:菱形、矩形、正方形、圆等</td></tr>
</table>

重点 2　变换作图问题

1. 平移图形的作法

(1)找到图形的关键点;(2)把关键点按照平移的方向和距离确定对应点;(3)顺次连接对应点即可得到平移后的图形。

2. 轴对称图形的作法

(1)确定图形的关键点;

(2)确定关键点到对称轴的距离,即点到直线的垂直距离;

(3)在对称轴另一侧找出关键点的对应点;

(4)顺次连接各点。

3. 旋转图形的作法

(1)明确旋转的三要素:旋转中心、旋转方向、旋转角;

(2)确定关键点,分别作出关键点绕旋转中心旋转后的对应点;

(3)顺次连接对应点即可得到旋转后的图形。

重点 3　最值模型

模型 1　“将军饮马”(轴对称)

已知直线 l 和直线外同侧两定点 A,B,在直线 l 上求作一点 P,使 $PA+PB$ 的值最小。

画法:如图 2-21-1,作点 A 关于直线 l 对称的点 D,连接 BD 与直线 l 相交于一点,则交点为所求作的点 P,$PA+PB$ 的值最小。

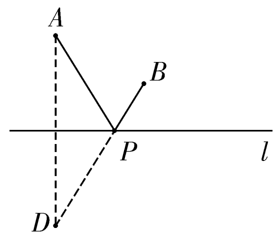


图 2-21-1

本质:将一定直线同侧两定点问题转化为一定直线异侧两定点间的距离。

模型 1 的变式①:同侧两线段差有最大值

当两定点 A,B 位于直线 l 同侧时,在直

线 l 上求作一点 P，使得 $|PA-PB|$ 的值最大。

画法：如图 2-21-2，连接 AB 并延长与直线 l 交于点 P，借助三角形的三边关系，可证明 $|PA-PB|\leqslant AB$。

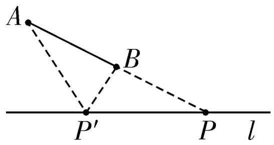


图 2-21-2

本质：一定直线同侧两定点到这条直线上一动点的距离之差有最大值，其最大值是两定点间的距离。

模型 1 的变式②：异侧线段差有最大值

当两定点 A，B 位于直线 l 异侧时，在直线 l 上求作一点 P，使得 $|PA-PB|$ 的值最大。

画法：如图 2-21-3，作点 A 关于直线 l 对称的点 D，连接 BD 并延长与直线 l 交于点 P，借助三角形的三边关系，可证明 $|PA-PB|\leqslant BD$。

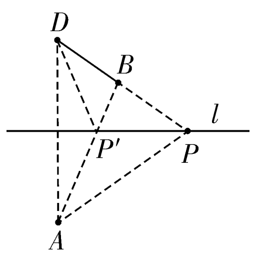


图 2-21-3

本质：一定直线异侧两定点到这条直线上一动点的距离之差有最大值，其最大值等于其中一定点关于这条直线对称后的点与另一定点之间的距离。

模型 2　建桥模型

已知 $l_1/\!/l_2$，点 A 在 l_1 的上方，点 B 在 l_2 的下方。现要在 l_1 或 l_2 上求作一点 P，过点 P 修与 l_1，l_2 垂直的一座桥，使 A 点到 B 点的距离最短。

画法：如图 2-21-4，设 l_1 与 l_2 之间的距离为 d，不妨将 A 点向下平移 d 个单位长度至 D 点，连接 DB，与 l_2 的交点就是所求作的点 P，且 $AD+DB$ 的值最小。

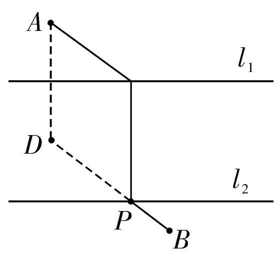


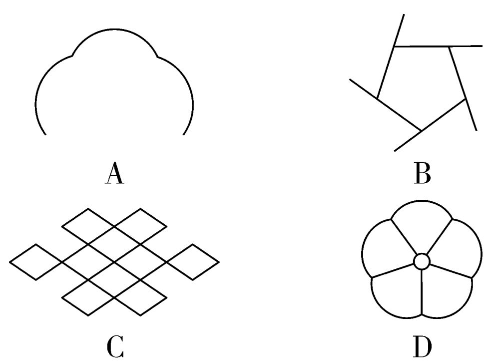
图 2-21-4

本质：利用平移点，将问题转化为两点间的距离。

经典试题解析

知识点 1　轴对称图形与中心对称图形

例 1　（2023·苏州中考）古典园林中的花窗通常利用对称构图，体现对称美。下面四个花窗图案中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是　（　　）



思路分析　利用轴对称图形和中心对称图形的定义直接判断。

解答　根据轴对称图形和中心对称图形的定义，四个选项中，只有C选项的图形既能沿着某条直线对折后与原来的图形重合也能绕着某点旋转180°后与原来的图形重合。

故选C。

知识点2　平移的性质

例2　（2022·金华中考）如图2-21-5，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$BC=2$ cm，把$\triangle ABC$沿AB方向平移1 cm，得到$\triangle A'B'C'$，连接CC'，则四边形$AB'C'C$的周长为________cm。

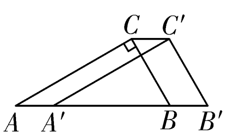


图2-21-5

思路分析　通过直角三角形性质、勾股定理、平移的性质分别计算出四边形的四条边长，再求周长即可。

解答　$\because \angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$BC=2$，

$\therefore AB=2BC=4$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$。

$\because$把$\triangle ABC$沿AB方向平移1 cm，得到$\triangle A'B'C'$，

$\therefore CC'=1$，$AB'=4+1=5$，$B'C'=BC=2$，

$\therefore$四边形$AB'C'C$的周长为$2\sqrt{3}+1+5+2=8+2\sqrt{3}$(cm)。

故答案为$8+2\sqrt{3}$。

知识点3　轴对称的性质

例3　（2023·吉林中考）如图2-21-6，将正五边形纸片$ABCDE$折叠，使点B与点E重合，折痕为AM，展开后，再将纸片折叠，使边AB落在线段AM上，点B的对应点为点B'，折痕为AF，则$\angle AFB'$的大小为________度。

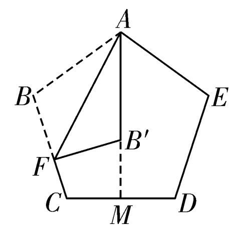


图2-21-6

思路分析　根据题意求得正五边形内角的度数，根据折叠的性质求$\angle FAB'$，$\angle AB'F$的度数，在$\triangle AFB'$中，根据三角形内角和定理即可求解。

解答　$\because$正五边形的每一个内角为$\frac{1}{5}\times(5-2)\times180°=108°$。

$\because$将正五边形纸片$ABCDE$折叠，使点B与点E重合，折痕为AM，

$\therefore \angle BAM=\frac{1}{2}\angle BAE=\frac{1}{2}\times108°=54°$。

$\because$将纸片折叠，使边AB落在线段AM上，点B的对应点为点B'，折痕为AF，

$\therefore \angle FAB'=\frac{1}{2}\angle BAM=\frac{1}{2}\times54°=27°$，$\angle AB'F=\angle B=108°$。

在$\triangle AFB'$中，$\angle AFB'=180°-\angle AB'F-\angle FAB'=180°-108°-27°=45°$。

故答案为45。

知识点4　旋转的性质

例4　（2023·无锡中考）如图2-21-7，

在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=55°$，将$\triangle ABC$逆时针旋转$\alpha(0°<\alpha<55°)$，得到$\triangle ADE$，DE交AC于F。当$\alpha=40°$时，点D恰好落在BC上，此时$\angle AFE$等于 (　　)

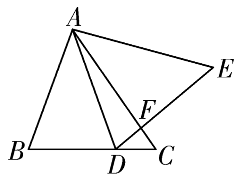


图 2-21-7

A. 80°　　B. 85°　　C. 90°　　D. 95°

思路分析 根据旋转的性质可得$\angle B=\angle ADE$，再结合旋转角$\alpha=40°$求解即可。

解答 由旋转性质可得$\angle BAC=\angle DAE=55°$，$AB=AD$。

$\because \alpha=40°$，

$\therefore \angle DAF=15°$，$\angle B=\angle ADB=\angle ADE=70°$，

$\therefore \angle AFE=\angle DAF+\angle ADE=85°$。

故选 B。

知识点 5　与对称有关的最值问题

例 5　(2023·邵阳中考)如图 2-21-8，在矩形$ABCD$中，$AB=2$，$AD=\sqrt{7}$，动点P在矩形的边上沿$B\to C\to D\to A$运动。当点P不与点A，B重合时，将$\triangle ABP$沿AP对折，得到$\triangle AB'P$，连接CB'，则在点P的运动过程中，线段CB'的最小值为________。

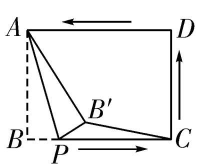


图 2-21-8

思路分析 根据折叠的性质得出B'在以点A为圆心，2为半径的圆弧上运动，进而分类讨论当点P在BC上时，当点P在DC上时，当点P在AD上时，进行求解即可。

解答 在矩形$ABCD$中，$AB=2$，$AD=\sqrt{7}$，连接AC，

$\therefore BC=AD=\sqrt{7}$，$AC=\sqrt{BC^2+AB^2}=\sqrt{7+4}=\sqrt{11}$，

如图 2-21-9，当点P在BC上时，

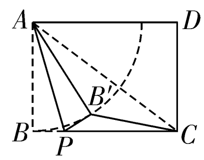


图 2-21-9

$\because AB'=AB=2$，

$\therefore B'$在以点A为圆心，2为半径的圆弧上运动，当A，B'，C三点共线时，CB'最小，

此时$CB'=AC-AB'=\sqrt{11}-2$；

如图 2-21-10，当点P在DC上时，

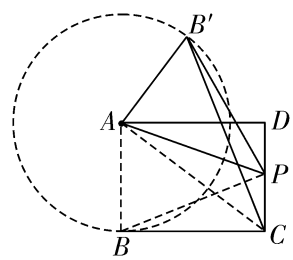


图 2-21-10

此时$CB'>\sqrt{11}-2$；

如图 2-21-11，当P在AD上时，此时$CB'>\sqrt{11}-2$；

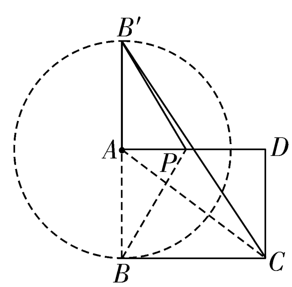


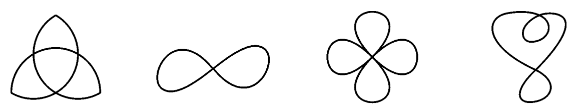
图 2-21-11

综上所述，CB'的最小值为$\sqrt{11}-2$。

故答案为$\sqrt{11}-2$。

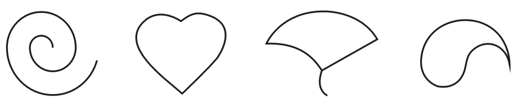
陕西中考链接

1. (2023·陕西中考)下列图形中,既是轴对称图形,又是中心对称图形的是 (C)



A　B　C　D

2. (2021·陕西中考)下列图形中,是轴对称图形的是 (B)



A　B　C　D

3. (2022·陕西中考)如图 2-21-12,$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(-2,3)$,$B(-3,0)$,$C(-1,-1)$。将$\triangle ABC$平移后得到$\triangle A'B'C'$,且点 A 的对应点是 $A'(2,3)$,点 B,C 的对应点分别是 B',C'。

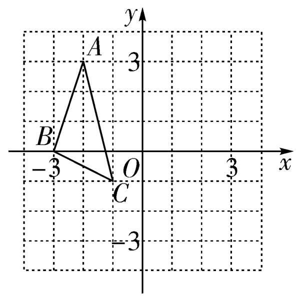
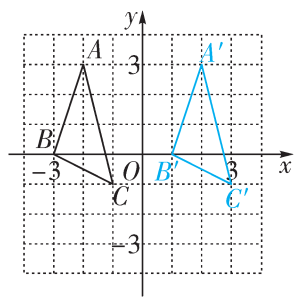


图 2-21-12

(1)点 A,A'之间的距离是__4__;

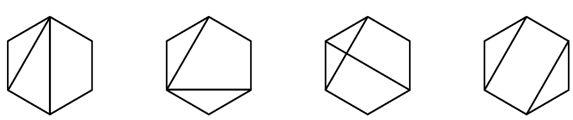
(2)请在图中画出$\triangle A'B'C'$。

解:(2)如图,$\triangle A'B'C'$即为所求。



核心素养培优

1. (2023·泰安中考)小亮以四种不同的方式连接正六边形的两条对角线,得到如下四种图形,则下图中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 (D)



A　B　C　D

2. (2023·南充中考)如图 2-21-13,将$\triangle ABC$沿 BC 向右平移得到$\triangle DEF$。若 $BC=5$,$BE=2$,则 CF 的长是 (A)

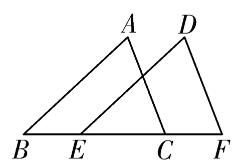


图 2-21-13

A. 2　　B. 2.5　　C. 3　　D. 5

3. (2023·赤峰中考)如图 2-21-14,在 Rt$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90^\circ$,$AB=10$,$BC=6$。点 F 是 AB 的中点,连接 CF,把线段 CF 沿射线 BC 的方向平移到 DE,点 D 在 AC 上,则线段 CF 在平移过程中扫过区域形成的四边形 $CFDE$ 的周长和面积分别是 (C)

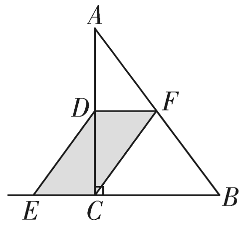


图 2-21-14

A. 16,6　　B. 18,18

C. 16,12　　D. 12,16

4. (2022・泰安中考)如图 2-21-15,将正方形网格放置在平面直角坐标系中,其中每个小正方形的边长均为 1,$\triangle ABC$ 经过平移后得到$\triangle A_1B_1C_1$。若 AC 上一点 $P(1.2,1.4)$ 平移后对应点为 P_1,点 P_1 绕原点顺时针旋转 180°,对应点为 P_2,则点 P_2 的坐标为　　(A)

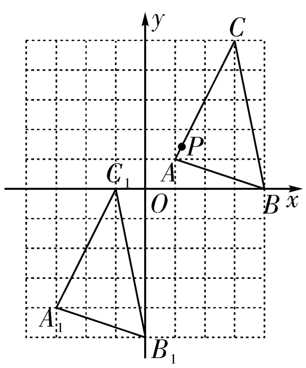


图 2-21-15

A. (2.8,3.6)　　B. (−2.8,−3.6)

C. (3.8,2.6)　　D. (−3.8,−2.6)

5. (2023・天津中考)如图 2-21-16,把$\triangle ABC$ 以点 A 为中心逆时针旋转得到$\triangle ADE$,点 B,C 的对应点分别是点 D,E,且点 E 在 BC 的延长线上,连接 BD,则下列结论一定正确的是　　(A)

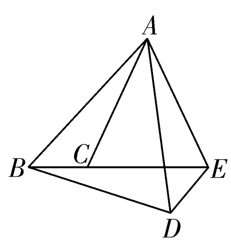


图 2-21-16

A. $\angle CAE=\angle BED$　　B. $AB=AE$

C. $\angle ACE=\angle ADE$　　D. $CE=BD$

6. (2023・连云港中考)以正五边形 $ABCDE$的顶点 C 为旋转中心,按顺时针方向旋转,使得新五边形 $A'B'CD'E'$的顶点 D'落在直线 BC 上,则正五边 $ABCDE$ 旋转的度数至少为__72__°。

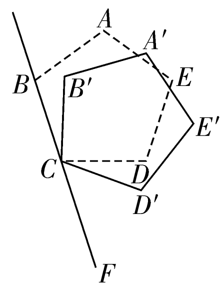


图 2-21-17

7. (2023・辽宁中考)如图 2-21-18,在三角形纸片 ABC 中,$AB=AC$,$\angle B=20°$,点 D 是边 BC 上的动点,将三角形纸片沿 AD 对折,使点 B 落在点 B'处,当 $B'D\perp BC$ 时,$\angle BAD$ 的度数为__25°或 115°__。

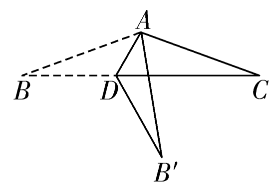


图 2-21-18

8. (2022・自贡中考)如图 2-21-19,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=4$,$BC=2$,G 是 AD 的中点,线段 EF 在边 AB 上左右滑动。若 $EF=1$,则 $GE+CF$ 的最小值为__$3\sqrt{2}$__。

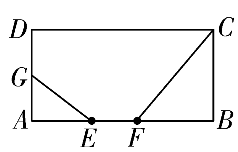


图 2-21-19

9. (2023・徐州中考)如图 2-21-20,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,$CA=CB=3$,点 D 在边 BC 上。将$\triangle ACD$ 沿 AD 折叠,使点 C 落在点

C'处，连接 BC'，则 BC' 的最小值为__$3\sqrt{2}-3$__。

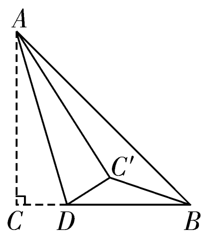


图 2-21-20

10. (2023·达州中考节选)如图 2-21-21，网格中每个小正方形的边长均为 1，$\triangle ABC$ 的顶点均在小正方形的格点上。

(1)将$\triangle ABC$ 向下平移 3 个单位长度得到$\triangle A_1B_1C_1$，画出$\triangle A_1B_1C_1$；

(2)将$\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90°得到$\triangle A_2B_2C_2$，画出$\triangle A_2B_2C_2$。

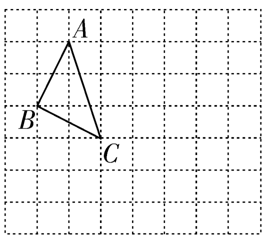
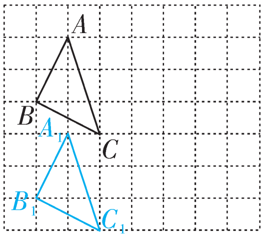
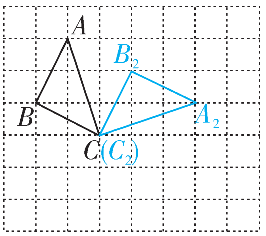


图 2-21-21

解：(1)作出点 A,B,C 平移后的对应点 A_1,B_1,C_1，顺次连接，则$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求，如图所示。



(2)作出点 A,B 绕点 C 顺时针旋转 90°的对应点 A_2,B_2，顺次连接，则$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求，如图所示。



第 22 讲　图形的相似

重难点突破

重点 1　判定三角形相似的基本思路

1. 基本思路

(1)条件中若有平行线，一般要借助基本事实及推论来判定三角形相似；

(2)条件中若有一对等角，可找另一对角相等或此角的两邻边对应成比例来判定三角形相似；

(3)条件中若有两边对应成比例，可找夹角相等或第三边对应的比与原比相等来判定三角形相似。

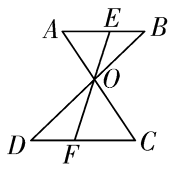
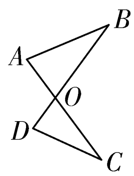
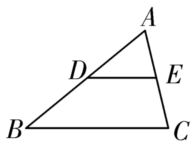
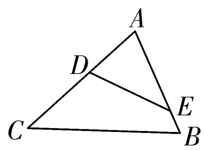
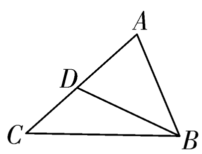
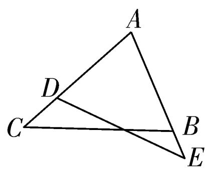
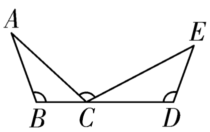
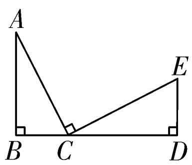
2. 判定特殊三角形相似的方法

(1)判定两个等腰三角形相似可找顶角相等或找底角相等或找底和腰对应成比例；

(2)直角三角形相似的判定除用一般方

法外还可用“斜边与一直角边对应成比例的两个直角三角形相似”判定。

重点2 判定三角形相似常用的模型

类型	图示
8字形模型	 $AB/\!/DC$  $\angle A=\angle D$
A字形模型	 $DE/\!/BC$  $\angle AED=\angle C$  $\angle ABD=\angle C$  $\angle AED=\angle C$
一线三等角模型	 $\angle B=\angle ACE=\angle D$  $\angle B=\angle ACE=\angle D=90^\circ$

重点3 相似三角形的应用

1. 用“标杆”测高

如图2-22-1，BC是标杆，DE是待测物高，且A,C,E三点在同一视线上，A,B,D三点在同一水平线上，则$\triangle AED\backsim\triangle ACB$。

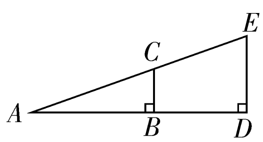


图2-22-1

2. 用“中心投影”测高

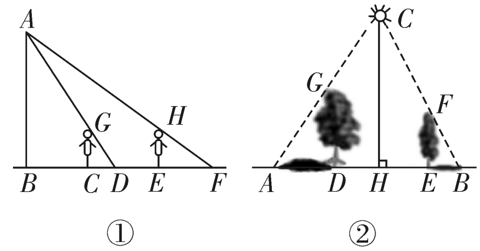


图2-22-2

如图2-22-2①②，点$A(C)$是“点光源”，$AB(CH)$是点光源到地面的距离，且点B,C,D,E,F(点A,D,H,E,B)在同一水平线上，$A,G,D(A,H,F;C,G,A;C,F,B)$三点在同一视线上，线段$CG,EH(DG,EF)$是人高或可测物高，则有$\triangle DCG\backsim\triangle DBA$，$\triangle FEH\backsim\triangle FBA(\triangle AGD\backsim\triangle ACH,\triangle BFE\backsim\triangle BCH)$。

3. 用“平行投影”测高

如图2-22-3，EA,FC是平行光线，线段BE是人高或可测物高，则有$\triangle ABE\backsim\triangle CDF$。

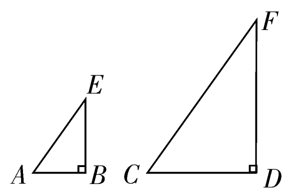


图2-22-3

4. 用“镜面反射”测高

如图2-22-4，这是借平面镜成像原理来解答问题，其中$AB(CD)$是可测物高，则有$\triangle ABO\backsim\triangle CDO$。

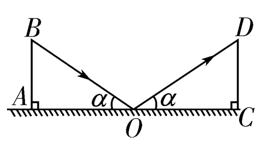


图2-22-4

经典试题解析

知识点 1　平行线分线段成比例

例 1　(2023 · 内江中考)如图 2-22-5，在$\triangle ABC$中，点D,E为边AB的三等分点，点F,G在边BC上，$AC // DG // EF$，点H为AF与DG的交点。若$AC=12$，则DH的长为　　　　(　　)

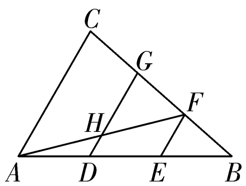


图 2-22-5

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 2　　D. 3

思路分析　由三等分点与平行线的性质得出$BE=DE=AD$,$BF=GF=CG$,$AH=HF$,DH是$\triangle AEF$的中位线，易证$\triangle BEF \backsim \triangle BAC$，得$\frac{EF}{AC}=\frac{BE}{AB}$，解得$EF=4$，则$DH=\frac{1}{2}EF=2$。

解答　$\because D$,E为边AB的三等分点，$EF // DG // AC$，

$\therefore BE=DE=AD$,$BF=GF=CG$,$AH=HF$，

$\therefore AB=3BE$,DH是$\triangle AEF$的中位线，

$\therefore DH=\frac{1}{2}EF$。

$\because EF // AC$，

$\therefore \angle BEF=\angle BAC$,$\angle BFE=\angle BCA$，

$\therefore \triangle BEF \backsim \triangle BAC$，

$\therefore \frac{EF}{AC}=\frac{BE}{AB}$，即$\frac{EF}{12}=\frac{BE}{3BE}$，

解得$EF=4$。

$\therefore DH=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}\times 4=2$。

故选 C。

知识点 2　位似变换

例 2　(2023 · 鄂州中考)如图 2-22-6，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$位似，原点O是位似中心，且$\frac{AB}{A_1B_1}=3$。若$A(9,3)$，则点A_1的坐标是________。

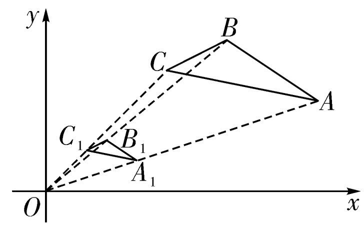


图 2-22-6

思路分析　利用位似图形的性质得出位似比计算即可。

解答　设$A_1(m,n)$，

$\because \triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$位似，原点O是位似中心，且$\frac{AB}{A_1B_1}=3$，已知$A(9,3)$，

$\therefore$位似比为$3:1$，

$\therefore \frac{9}{m}=\frac{3}{1}$,$\frac{3}{n}=\frac{3}{1}$，

解得$m=3$,$n=1$，

$\therefore A_1(3,1)$。

故答案为$(3,1)$。

知识点 3　相似三角形的判定与性质

例 3　(2023 · 成都中考)如图 2-22-7，在$\triangle ABC$中，D是边AB上一点，按以下步骤作图：①以点A为圆心，以适当长为半径作弧，分别交AB,AC于点M,N；②以点D为圆心，以AM长为半径作弧，交DB于点M'；

③以点 M' 为圆心，以 MN 长为半径作弧，在 $\angle BAC$ 内部交前面的弧于点 N'；④过点 N' 作射线 DN' 交 BC 于点 E。若 $\triangle BDE$ 与四边形 $ACED$ 的面积比为 $4:21$，则 $\frac{BE}{CE}$ 的值为________。

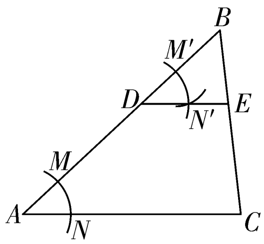


图 2-22-7

思路分析 根据作图可得 $\angle BDE=\angle A$，然后得出 $DE\parallel AC$，可证明 $\triangle BDE\backsim\triangle BAC$，进而根据相似三角形的性质即可求解。

解答 根据作图可得 $\angle BDE=\angle A$，

$\therefore DE\parallel AC$，

$\therefore \triangle BDE\backsim\triangle BAC$。

$\because \triangle BDE$ 与四边形 $ACED$ 的面积比为 $4:21$，

$\therefore \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BAC}}=\frac{4}{21+4}=\left(\frac{BE}{BC}\right)^2$，

$\therefore \frac{BE}{BC}=\frac{2}{5}$，

$\therefore \frac{BE}{CE}=\frac{2}{3}$。

故答案为 $\frac{2}{3}$。

知识点 4 相似三角形的实际应用

例 4 （2023·江西中考）《周髀算经》中记载了"偃矩以望高"的方法。"矩"在古代指两条边呈直角的曲尺（即图中的 ABC）。"偃矩以望高"的意思是把"矩"仰立放，可测量物体的高度。如图 2-22-8，点 A,B,Q 在同一水平线上，$\angle ABC$ 和 $\angle AQP$ 均为直角，AP 与 BC 相交于点 D。测得 $AB=40\ \text{cm}$，$BD=20\ \text{cm}$，$AQ=12\ \text{m}$，则树高 $PQ=$________m。

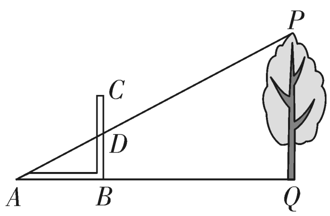


图 2-22-8

思路分析 根据题意可得 $\triangle ABD\backsim\triangle AQP$，然后利用相似三角形的性质，即可求解。

解答 $\because \angle ABC$ 和 $\angle AQP$ 均为直角，

$\therefore BD\parallel PQ$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle AQP$，

$\therefore \frac{BD}{PQ}=\frac{AB}{AQ}$。

$\because AB=40\ \text{cm}=0.4\ \text{m}$，$BD=20\ \text{cm}=0.2\ \text{m}$，$AQ=12\ \text{m}$，

$\therefore PQ=\frac{AQ\times BD}{AB}=\frac{12\times 0.2}{0.4}=6(\text{m})$。

故答案为 6。

陕西中考链接

（2022·陕西中考）小明和小华利用阳光下的影子来测量一建筑物顶部旗杆的高。如图 2-22-9，在某一时刻，他们在阳光下，分别测得该建筑物 OB 的影长 OC 为 16 m，OA 的影长 OD 为 20 m，小明的影长 FG 为 2.4 m，其中 O,C,D,F,G 五点在同一直线

上，A, B, O 三点在同一直线上，且 $AO \perp OD$，$EF \perp FG$。已知小明的身高 EF 为 1.8 m，求旗杆的高 AB。

解：$\because AD /\!/ EG$，

$\therefore \angle ADO = \angle EGF$。

又 $\because \angle AOD = \angle EFG = 90°$，

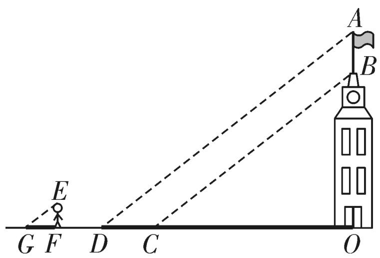


图 2-22-9

$\therefore \triangle AOD \backsim \triangle EFG$，

$\therefore \dfrac{AO}{EF} = \dfrac{OD}{FG}$，

$\therefore AO = \dfrac{EF \cdot OD}{FG} = \dfrac{1.8 \times 20}{2.4} = 15$。

同理可得，$\triangle BOC \backsim \triangle AOD$，

$\therefore \dfrac{BO}{AO} = \dfrac{OC}{OD}$，

$\therefore BO = \dfrac{AO \cdot OC}{OD} = \dfrac{15 \times 16}{20} = 12$，

$\therefore AB = OA - OB = 3(\text{m})$，

$\therefore$ 旗杆的高 AB 为 3 m。

核心素养培优

1. (2023 · 重庆中考)如图 2-22-10，已知 $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$，$AC : EC = 2 : 3$。若 AB 的长度为 6，则 DE 的长度为 (B)

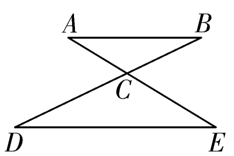


图 2-22-10

A. 4　　B. 9　　C. 12　　D. 13.5

2. (2023 · 嘉兴中考)如图 2-22-11，在直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1, 2)$，$B(2, 1)$，$C(3, 2)$，现以原点 O 为位似中心，在第一象限内作与 $\triangle ABC$ 的位似比为 2 的位似图形 $\triangle A'B'C'$，则顶点 C' 的坐标是 (C)

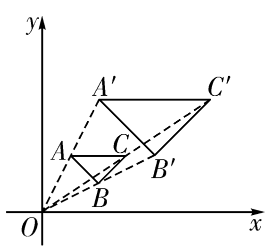


图 2-22-11

A. (2, 4)　　B. (4, 2)

C. (6, 4)　　D. (5, 4)

3. (2023 · 南充中考)如图 2-22-12，数学活动课上，为测量学校旗杆高度，小菲同学在脚下水平放置一平面镜，然后向后退(保持脚、镜和旗杆底端在同一直线上)，直到她刚好在镜子中看到旗杆的顶端。已知小菲的眼睛离地面高度为 1.6 m，同时量得小菲与镜子的水平距离为 2 m，镜子与旗杆的水平距离为 10 m，则旗杆高度为 (B)

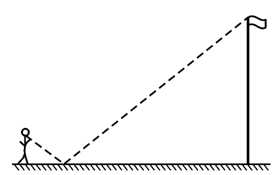


图 2-22-12

A. 6.4 m　　B. 8 m

C. 9.6 m　　D. 12.5 m

4. 在设计人体雕像时，使雕像上部(腰部以上)与下部(腰部以下)的高度比，等于下部与全部的高度比，可以增加视觉美感。如果按此比例设计一座高度为 2 m 的雷锋雕

像，那么该雕像的下部设计高度约是（结果精确到0.01 m。参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{5}\approx2.236$） （ B ）

A. 0.73 m　　B. 1.24 m

C. 1.37 m　　D. 1.42 m

5.（2023·黄冈中考）如图2-22-13，在矩形$ABCD$中，$AB=3$，$BC=4$，以点B为圆心，适当长为半径画弧，分别交BC，BD于点E，F，再分别以点E，F为圆心，大于$\frac{1}{2}EF$长为半径画弧交于点P，作射线BP，过点C作BP的垂线分别交BD，AD于点M，N，则CN的长为 （ A ）

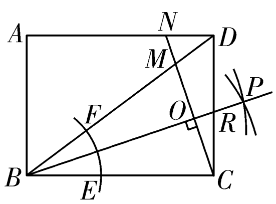


图 2-22-13

A. $\sqrt{10}$　　B. $\sqrt{11}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

6.（2023·安徽中考）如图2-22-14，点E在正方形$ABCD$的对角线AC上，$EF\perp AB$，垂足为点F，连接DE并延长，交边BC于点M，交边AB的延长线于点G。若$AF=2$，$FB=1$，则$MG=$ （ B ）

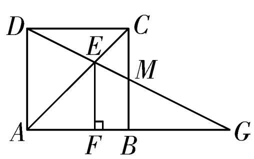


图 2-22-14

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

C. $\sqrt{5}+1$　　D. $\sqrt{10}$

7.（2023·东营中考）如图2-22-15，正方形$ABCD$的边长为4，点E，F分别在边DC，BC上，且$BF=CE$，AE平分$\angle CAD$，连接DF，分别交AE，AC于点G，M，点P是线段AG上的一个动点，过点P作$PN\perp AC$，垂足为N，连接PM，有下列四个结论：①AE垂直平分DM；②$PM+PN$的最小值为$3\sqrt{2}$；③$CF^2=GE\cdot AE$；④$S_{\triangle ADM}=6\sqrt{2}$。其中正确的是 （ D ）

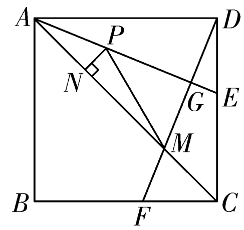


图 2-22-15

A. ①②　　B. ②③④

C. ①③④　　D. ①③

8.（2023·大连中考）如图2-22-16，在正方形$ABCD$中，$AB=3$，延长BC至E，使$CE=2$，连接AE，CF平分$\angle DCE$交AE于F，连接DF，则DF的长为$\underline{\frac{3\sqrt{10}}{4}}$。

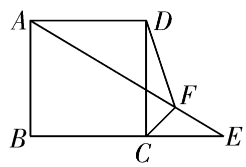


图 2-22-16

9.（2023·天津中考）如图2-22-17，在边长为3的正方形$ABCD$的外侧，作等腰三角形ADE，$EA=ED=\frac{5}{2}$。

（1）求$\triangle ADE$的面积；

（2）若F为BE的中点，连接AF并延长，与CD相交于点G，求AG的长。

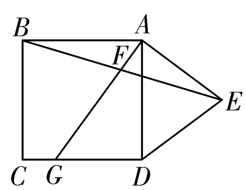
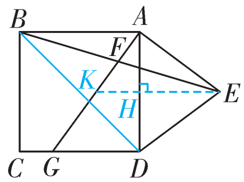


图 2-22-17

解：（1）如图，过点E作$EH\perp AD$，垂足为

H。



∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为3，

∴ $AD=3$。

∵ $\triangle ADE$ 是等腰三角形，$EA=ED=\frac{5}{2}$，$EH\perp AD$，

∴ $AH=DH=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$，

在 Rt $\triangle AHE$ 中，$EH=\sqrt{AE^2-AH^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=2$，

∴ $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot EH=\frac{1}{2}\times3\times2=3$。

(2)如图，延长 EH 交 AG 于点 K。

∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为3，

∴ $\angle BAD=\angle ADC=90°$，$AB=3$，

∴ $AB\perp AD$，$CD\perp AD$。

∵ $EK\perp AD$，

∴ $AB\parallel EK\parallel CD$，

∴ $\angle ABF=\angle KEF$。

∵ F 为 BE 的中点，

∴ $BF=EF$。

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle KEF$ 中，

$$\begin{cases}\angle ABF=\angle KEF,\\ BF=EF,\\ \angle AFB=\angle KFE,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABF\cong\triangle KEF$(ASA)，

∴ $EK=AB=3$，

由(1)可知，$AH=\frac{3}{2}$，$EH=2$，

∴ $KH=1$。

∵ $KH\parallel CD$，

∴ $\triangle AHK\backsim\triangle ADG$，

∴ $\frac{KH}{GD}=\frac{AH}{AD}$，

∴ $GD=2$，

在 Rt $\triangle ADG$ 中，$AG=\sqrt{AD^2+GD^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$。

第23讲　投影与视图

重难点突破

重点1　画几何体的三视图

1. 画几何体的三视图的步骤

(1)确定主视图位置，画出主视图；

(2)在主视图的正下方画出俯视图，注意与主视图“长对正”；

(3)在主视图的正右方画出左视图，注意与主视图“高平齐”，与俯视图“宽相等”。

2. 画物体的三视图时应注意：几何体看得见的部分的轮廓线要画成实线，被其他部分遮挡而看不见的部分的轮廓线应画成虚线。

重点 2 由三视图想象几何体

由三视图想象几何体，可从以下两方面思考：

（1）主视图反映几何体的长和高，俯视图反映几何体的长和宽，左视图反映几何体的高和宽；

（2）从实线和虚线想象几何体看得见的部分和看不见部分的轮廓线。

重点 3 常见立体图形的平面展开图

1. 常见立体图形的展开图：圆柱的展开图是矩形和两个圆形；圆锥的展开图是扇形和圆形；

2. 正方体的 11 种展开图

（1）“一四一”型（口诀：中间 4 个一连串，两边各一随便放）

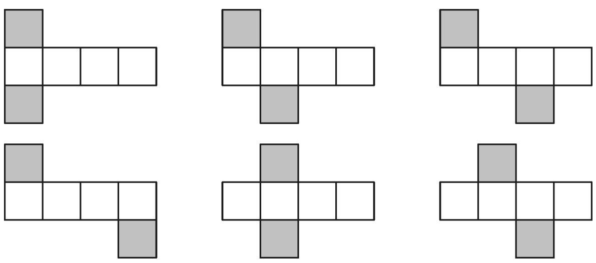


图 2-23-1

（2）“二三一”型（口诀：二三紧连错一个，三一相连一随便）

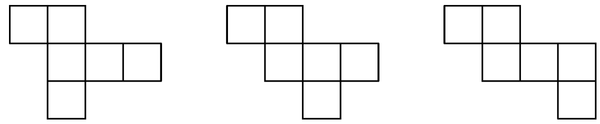


图 2-23-2

（3）“二二二”型（口诀：两两相连各挪一）

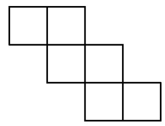


图 2-23-3

（4）“三三”型（口诀：三个两排一对齐）

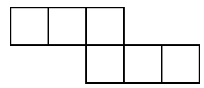


图 2-23-4

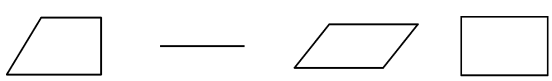
易混淆点 平行投影、中心投影与正投影的区别

平行投影与中心投影可以根据投影光线进行区分，投影线平行的是平行投影，投影线相交于一点的是中心投影。正投影可以根据投影光线与投影面的位置关系确定，投影光线与投影面垂直的投影是正投影，正投影属于平行投影。

经典试题解析

知识点 1 投影

例 1 在太阳光的照射下，一个矩形木框在水平地面上形成的投影不可能是 （　　）



A　　B　　C　　D

思路分析 根据平行投影得出矩形的投影图形。

解答 在平行投影下，矩形的投影可能是直线、矩形、平行四边形，不可能是直角梯形。

故选 A。

知识点 2 几何体的三视图

例 2 （2023 · 内蒙古中考）几个大小相同的小正方体搭成几何体的俯视图如图

2-23-5所示，图中小正方形中数字表示对应位置小正方体的个数，该几何体的主视图是 （　　）

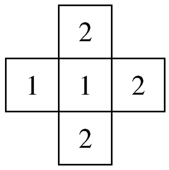
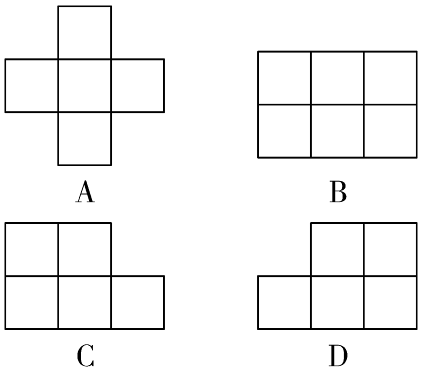


图 2-23-5



思路分析 根据俯视图中每列正方形的个数判断从正面看到的图形即可。

解答 根据俯视图可知，这个几何体的主视图有 3 列，从左到右正方形的个数分别为 1，2，2。

故选 D。

知识点 3 由三视图判断几何体

例 3 （2023 · 龙东地区中考）一个几何体由若干大小相同的小正方体组成，它的俯视图和左视图如图 2-23-6 所示，那么组成该几何体所需小正方体的个数最少为 （　　）

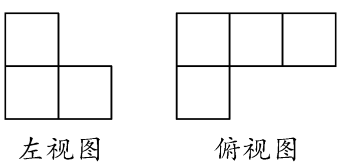


图 2-23-6

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

思路分析 从俯视图可以看出最底层小正方体的个数及形状，从左视图可以看出小正方体的层数和个数，从而算出总的小正方体个数。

解答 由俯视图可知最底层有 4 个小正方体，由左视图可知第二层至少有 1 个小正方体，最多有 3 个小正方体，所以组成该几何体所需小正方体的个数最少为 5。

故选 B。

知识点 4 几何体的展开与折叠

例 4 （2023 · 宜昌中考）图 2-23-7 是一个正方体的平面展开图，把展开图折叠成正方体后，“城”字对面的字是 （　　）

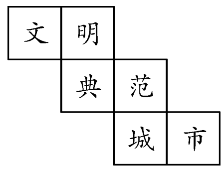


图 2-23-7

A. 文　　B. 明　　C. 典　　D. 范

思路分析 根据正方体的展开图进行判断即可。

解答 由正方体的展开图可知“诚”字所在面相对的面上的汉字是“明”。

故选 B。

例 5 （2022 · 绥化中考）下列图形中，正方体展开图错误的是 （　　）

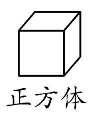
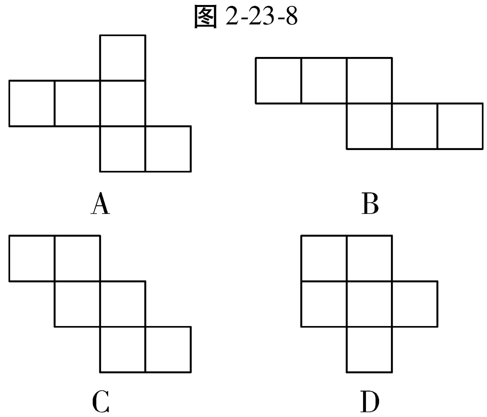


图 2-23-8



思路分析 利用正方体及其表面展开图的特点解题。

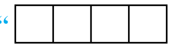
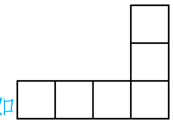
解答 D 选项出现了“田字形”，折叠后

有一行两个面无法折起来，从而缺少面，不能折成正方体，A，B，C 选项都是正方体的表面展开图。

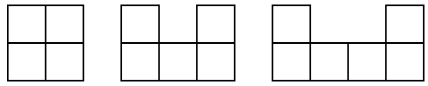
故选 D。

温馨提示 一般来说，如出现下面几种情形，则不是正方体表面展开图：

(1)一条直线上的小正方形的个数超过 4 个。

(2)出现“”类型时，另两面不在两侧，如。

(3)“田”字形，“凹”字形，如下：



陕西中考链接

(2019·陕西中考)图 2-23-9 是由两个正方体组成的几何体，则该几何体的俯视图为 (C)

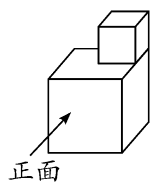
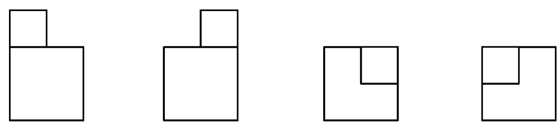


图 2-23-9



A　　B　　C　　D

核心素养培优

1. 由下列光源产生的投影，是平行投影的是 (A)

A. 太阳　　B. 路灯

C. 手电筒　　D. 台灯

2. (2023·福建中考)图 2-23-10 是由一个长方体和一个圆柱组成的几何体，它的俯视图是 (D)

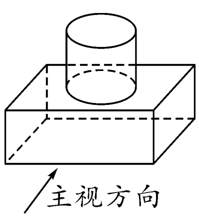
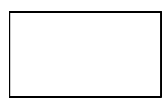
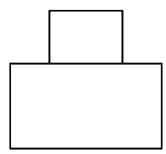


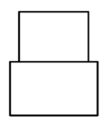
图 2-23-10



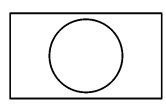
A



B

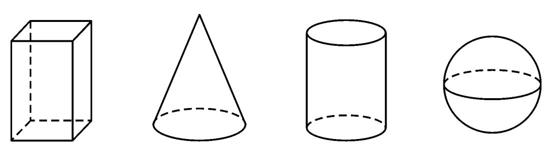


C



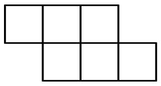
D

3. (2023·十堰中考)下列几何体中，三视图的三个视图完全相同的几何体是 (D)

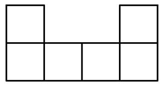


A　　B　　C　　D

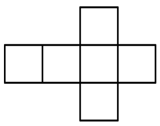
4.(2022·宿迁中考)下列展开图中,是正方体展开图的是 (C)



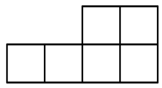
A



B



C



D

5.(2023·枣庄中考)榫卯是古代中国建筑、家具及其他器械的主要结构方式,是我国工艺文化精神的传奇;凸出部分叫榫,凹进部分叫卯。图 2-23-11 是某个部件"卯"的实物图,它的主视图是 (C)

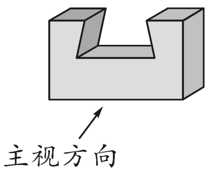
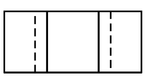
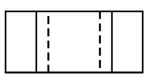


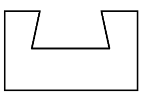
图 2-23-11



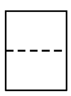
A



B



C



D

6.(2023·济宁中考)一个几何体的三视图如图 2-23-12 所示,则这个几何体的表面积是 (B)

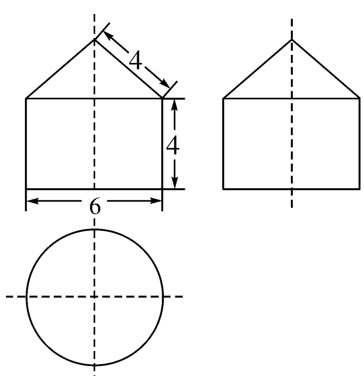


图 2-23-12

A. 39π　B. 45π　C. 48π　D. 54π

7.(2023·苏州中考)小东同学准备送给父亲一个小礼物。已知礼物外包装的主视图如图 2-23-13 所示,则该礼物的外包装不可能是 (D)

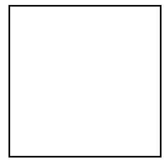


图 2-23-13

A. 长方体　　B. 正方体

C. 圆柱　　D. 三棱锥

8.(2023·眉山中考)由相同的小正方体搭成的几何体的部分视图如图 2-23-14 所示,则搭成该几何体的小正方体的最少个数为 (B)

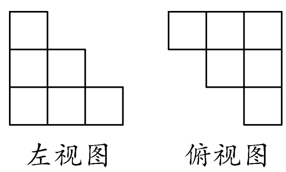


图 2-23-14

A. 6　B. 9　C. 10　D. 14

9.(2023·巴中中考)某同学学习了正方体的表面展开图后,在如图 2-23-15 所示的正方体的表面展开图上写下了"传承红色文化"六个字,还原成正方体后,"红"的对面是 (D)

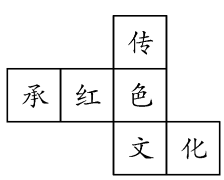


图 2-23-15

A. 传　B. 承　C. 文　D. 化

第 24 讲　圆的有关概念与性质

重难点突破

重点 1　应用圆周角定理的技巧

1. 要注意“弧”的桥梁作用：圆周角定理及其推论的实质是圆周角和圆心角、圆周角和圆周角之间的相互转换，这种转换的条件是“同一条弧所对的”两种角，在运用定理时不要忽略这个条件。

2. 注意构造与转化运用

（1）可通过作圆的半径构造等腰三角形，利用等腰三角形的顶角和底角的关系进行转化；

（2）条件中有直径时，常常要构造直径所对的圆周角，运用直角三角形的性质解答。

重点 2　圆内接四边形性质定理

根据圆内接四边形的对角互补可得：（1）圆内接四边形的任意一个外角等于它的内对角，在解决问题时常可以实现等角的转化。（2）如果一个四边形对角互补，那么这个四边形的四个顶点一定在一个圆上。

难 点　解决问题常用几何模型

模型 1　圆（内）外一点到圆上一点的最值问题模型

如图 2-24-1，点 M 是⊙O 的内部或外部的任意一点，则过圆心 O 与 M 两点的直线与圆交于点 F，点 H，根据三角形三边关系可知线段 MF 的长就是点 M 与圆上任意一点连线的最大值；线段 MH 的长就是点 M 与圆上任意一点连线的最小值。

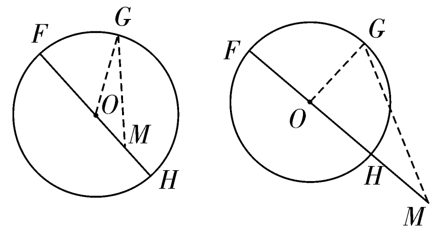


图 2-24-1

模型 2　过圆内一点，有最长（短）弦的问题模型

如图 2-24-2，在⊙O 中，点 A 是⊙O 内部异于圆心 O 的一点，则过点 A 所作的弦中，有最长弦直径 BC，即过点 A、过圆心 O 的弦 BC；有最短弦 DE，即过点 A 且与 BC 垂直的弦。

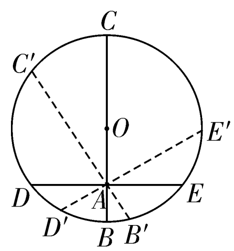


图 2-24-2

易错点　圆中的分类思想

1. 已知圆心到两条平行弦的距离，求两条平行弦之间的距离 d 时需要分类讨论，如图 2-24-3。

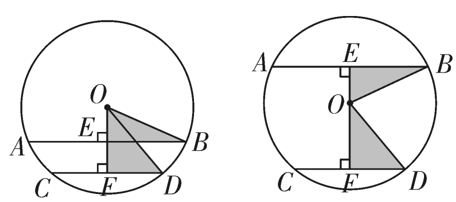


图 2-24-3

（1）当两条弦位于圆心同侧时，$d = OF - OE$；

（2）当两条弦位于圆心异侧时，$d = OF + OE$。

2. 已知圆内一条弦和其对应的圆心角，求其对应的圆周角时要分情况讨论，如图 2-24-4。

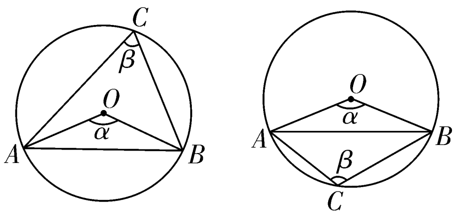


图 2-24-4

（1）圆周角的顶点在弦所对的优弧上，$\angle\beta = \frac{1}{2}\angle\alpha$；

（2）圆周角的顶点在弦所对的劣弧上，$\angle\beta = 180° - \frac{1}{2}\angle\alpha$。

经典试题解析

知识点 1　圆心角、弧、弦、圆周角定理

例 1　（2023 · 温州中考）如图 2-24-5，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$BC \parallel AD$，$AC \perp BD$。若 $\angle AOD = 120°$，$AD = \sqrt{3}$，则 $\angle CAO$ 的度数与 BC 的长分别为　（　　）

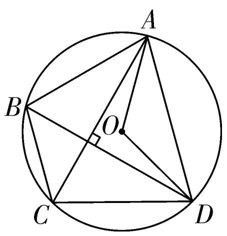


图 2-24-5

A. $10°, 1$　　　B. $10°, \sqrt{2}$

C. $15°, 1$　　　D. $15°, \sqrt{2}$

思路分析　由平行线的性质、圆周角定理和垂直的定义推出 $\angle AOB = \angle COD = 90°$，$\angle CAD = \angle BDA = 45°$，得出 $\angle BOC = 60°$，得到 $\triangle BOC$ 是等边三角形，得出 $BC = OB = OA$，根据等腰三角形的性质计算角度和长度即可。

解答　如图 2-24-6，记 AC 与 BD 交于点 F，连接 BO，CO，过 O 作 $OE \perp AD$，垂足为 E。

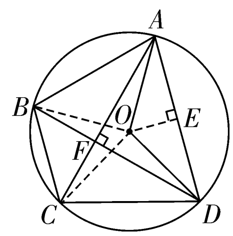


图 2-24-6

$\because BC \parallel AD$，$\therefore \angle DBC = \angle ADB$，

$\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，

$\therefore \angle AOB = \angle COD$，$\angle CAD = \angle BDA$。

$\because DB \perp AC$，$\therefore \angle AFD = 90°$，

$\therefore \angle CAD = \angle BDA = 45°$，

$\therefore \angle AOB = 2\angle BDA = 90°$，$\angle COD = 2\angle CAD = 90°$。

$\because \angle AOD = 120°$，

$\therefore \angle BOC = 360° - 90° - 90° - 120° = 60°$。

$\because OB = OC$，$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形，

$\therefore BC = OB = OA$。

$\because OA = OD$，$\angle AOD = 120°$，

$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 30°$，

$\therefore \angle CAO = \angle CAD - \angle OAD = 45° - 30° = 15°$。

$\because AD=\sqrt{3}$，$\therefore AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore OA=\dfrac{AE}{\cos 30^\circ}=1$，

$\therefore BC=OA=1$。

故选 C。

知识点 2 圆内接四边形

例 2 （2023 · 广安中考）如图 2-24-7，AB 是 $\odot O$ 的直径，D，C 是 $\odot O$ 上的点，$\angle ADC=115^\circ$，则 $\angle BAC$ 的度数是 （　　）

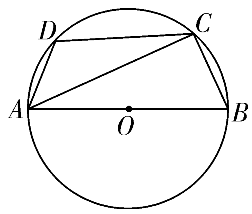


图 2-24-7

A. 25°　B. 30°　C. 35°　D. 40°

思路分析 根据圆内接四边形对角互补和直径所对的圆周角等于 90° 解答即可。

解答 $\because \angle ADC=115^\circ$，$\therefore \angle B=65^\circ$。

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ACB=90^\circ$，

$\therefore \angle BAC=180^\circ-90^\circ-65^\circ=25^\circ$。

故选 A。

知识点 3 圆中最值问题

例 3 （2023 · 台州中考）如图 2-24-8，$\odot O$ 的圆心 O 与正方形的中心重合，$\odot O$ 的半径和正方形的边长都为 4，则圆上任意一点到正方形边上任意一点距离的最小值为 （　　）

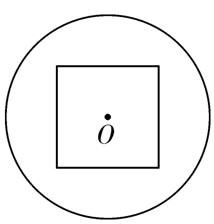


图 2-24-8

A. $\sqrt{2}$　　　B. 2

C. $4+2\sqrt{2}$　　　D. $4-2\sqrt{2}$

思路分析 设正方形四个顶点分别为 A，B，C，D，连接 OA 并延长，交 $\odot O$ 于点 F，则 AF 的长度为圆上任意一点到正方形边上任意一点距离的最小值。

解答 如图 2-24-9，设正方形四个顶点分别为 A，B，C，D，连接 OA 并延长，交 $\odot O$ 于点 F，过 O 作 $OE\perp AD$，垂足为 E。

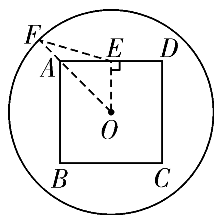


图 2-24-9

$\therefore AF$ 的长度为圆上任意一点到正方形边上任意一点距离的最小值，

由题意可得，$OF=AD=4$，$OE=AE=\dfrac{1}{2}AD=2$，

$\therefore$ 由勾股定理得 $OA=\sqrt{AE^2+OE^2}=2\sqrt{2}$，$\therefore AF=OF-OA=4-2\sqrt{2}$，

$\therefore$ 圆上任意一点到正方形边上任意一点距离的最小值为 $4-2\sqrt{2}$。

故选 D。

温馨提示 圆内一点到圆上一点的最值模型是解决这一问题的依据，但与常见模型不同之处是本题圆内动点只是在正方形边上移动，只要能把圆内动点位置确定（即和正方形顶点重合），圆上动点就随之确定，最小值即为圆的半径减去正方形对角线的一半。从复杂的图形中正确地识别模型是解题的关键。

陕西中考链接

1. (2023・陕西中考)如图 2-24-10,陕西饮食文化源远流长,“老碗面”是陕西地方特色美食之一。图②是从正面看到的一个“老碗”(图 2-24-10①)的形状示意图。$\overset{\frown}{AB}$是⊙O的一部分,D 是$\overset{\frown}{AB}$的中点,连接 OD,与弦 AB 交于点 C,连接 OA,OB。已知 $AB=24$ cm,碗深 $CD=8$ cm,则⊙O 的半径 OA 为 (　A　)

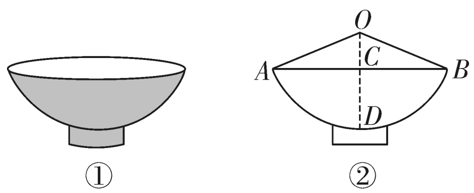


图 2-24-10

A. 13 cm　　B. 16 cm

C. 17 cm　　D. 26 cm

2. (2022・陕西中考)如图 2-24-11,△ABC 内接于⊙O,∠$C=46°$,连接 OA,则∠$OAB=$ (　A　)

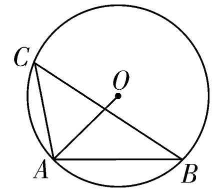


图 2-24-11

A. 44°　B. 45°　C. 54°　D. 67°

3. (2021・陕西中考)如图 2-24-12,正方形 $ABCD$ 的边长为 4,⊙O 的半径为 1。若⊙O 在正方形 $ABCD$ 内平移(⊙O 可以与该正方形的边相切),则点 A 到⊙O 上的点的距离的最大值为 $\underline{\ 3\sqrt{2}+1\ }$。

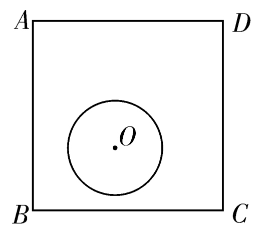


图 2-24-12

核心素养培优

1. (2023・黄冈中考)如图 2-24-13,在⊙O 中,直径 AB 与弦 CD 相交于点 P,连接 AC,AD,BD。若∠$C=20°$,∠$BPC=70°$,则∠$ADC=$ (　D　)

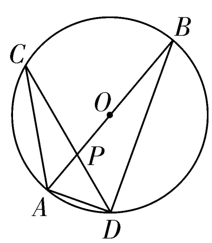


图 2-24-13

A. 70°　B. 60°　C. 50°　D. 40°

2. (2023・宜宾中考)如图 2-24-14,已知点 A,B,C 在⊙O 上,C 为$\overset{\frown}{AB}$的中点。若∠$BAC=35°$,则∠AOB 等于 (　A　)

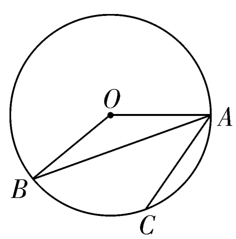


图 2-24-14

A. 140°　B. 120°　C. 110°　D. 70°

3. (2023·聊城中考)如图 2-24-15,点 O 是$\triangle ABC$ 外接圆的圆心,点 I 是$\triangle ABC$ 的内心,连接 OB,IA。若$\angle CAI=35°$,则$\angle OBC$ 的度数为　(　C　)

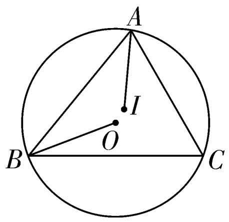


图 2-24-15

A. 15°　　B. 17.5°

C. 20°　　D. 25°

4. (2023·赤峰中考)如图 2-24-16,圆内接四边形 $ABCD$ 中,$\angle BCD=105°$,连接 OB,OC,OD,BD,$\angle BOC=2\angle COD$,则$\angle CBD$ 的度数是　(　A　)

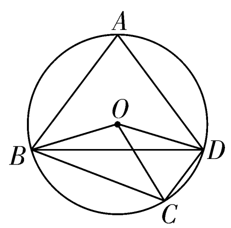


图 2-24-16

A. 25°　B. 30°　C. 35°　D. 40°

5. (2023·宜昌中考)如图 2-24-17,OA,OB,OC 都是⊙O 的半径,AC 与 OB 交于点 D。若 $AD=CD=8$,$OD=6$,则 BD 的长为　(　B　)

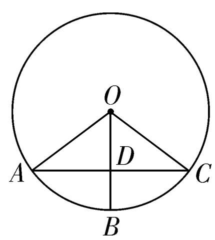


图 2-24-17

A. 5　B. 4　C. 3　D. 2

6. (2023·凉山州中考改编)如图 2-24-18,在⊙O 中,$OA\perp BC$,$\angle ADB=30°$,$BC=2\sqrt{3}$,则 OC 的长为__2__。

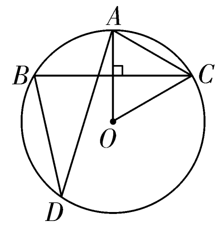


图 2-24-18

7. (2023·郴州中考)如图 2-24-19,某博览会上有一圆形展示区,在其圆形边缘的点 P 处安装了一台监视器,它的监控角度是 55°,为了监控整个展区,最少需要在圆形边缘上共安装这样的监视器__4__台。

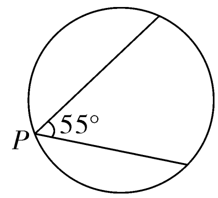


图 2-24-19

8. (2022·襄阳中考)已知⊙O 的直径 AB 的长为 2,弦 AC 长为$\sqrt{2}$,那么弦 AC 所对的圆周角度数为__45°或 135°__。

9. (2023·湘西州中考)如图 2-24-20,⊙O 是等边三角形 ABC 的外接圆,其半径为 4,过点 B 作 $BE\perp AC$,垂足为点 E,点 P 为线段 BE 上一动点(点 P 不与 B,E 重合),则 $CP+\frac{1}{2}BP$的最小值为__6__。

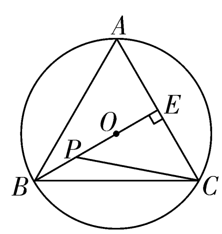


图 2-24-20

10. (2023·上海中考)如图 2-24-21,在⊙O 中,弦 AB 的长为 8,点 C 在 BO 延长线上,且 $\cos\angle ABC=\frac{4}{5}$,$OC=\frac{1}{2}OB$。

(1)求⊙O的半径;

(2)求$\angle BAC$的正切值。

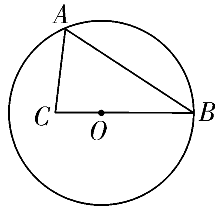


图 2-24-21

解:(1)如图,延长BC交⊙O于点D,连接AD。

由圆周角定理得$\angle BAD=90°$,

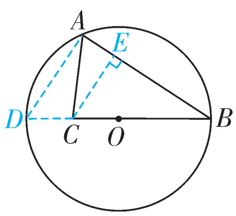
$\because$ 弦AB的长为8,且$\cos\angle ABC=\frac{4}{5}$,

$\therefore \frac{AB}{BD}=\frac{8}{BD}=\frac{4}{5}$,

解得$BD=10$,

$\therefore OB=\frac{1}{2}BD=5$,

$\therefore$ ⊙O的半径为5。



(2)如图,过点C作$CE\perp AB$,垂足为点E。

由(1)得$OB=5$。$\because OC=\frac{1}{2}OB$,

$\therefore BC=\frac{3}{2}OB=\frac{15}{2}$。

$\because \cos\angle ABC=\frac{4}{5}$,

$\therefore \frac{BE}{BC}=\frac{4}{5}$,

解得$BE=6$,

$\therefore AE=AB-BE=2$,

$\therefore$ 在 Rt$\triangle BEC$中,$CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=\frac{9}{2}$,

$\therefore \tan\angle BAC=\frac{CE}{AE}=\frac{\frac{9}{2}}{2}=\frac{9}{4}$。

第 25 讲　与圆有关的位置关系

重难点突破

重点 1　切线的性质

1. 切线的性质有三条:(1)圆的切线垂直于经过切点的半径;(2)经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点;(3)经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心。

2. 由定理可知常见辅助线作法:(1)见切点,连半径,得垂直;(2)无切点,作垂直,得相等(由圆心作切线的垂线段,则圆心到

切线的距离等于圆的半径)。

重点2 切线的判定

1. 切线的判定必须满足两个条件

(1)经过半径的外端;(2)垂直于这条半径。

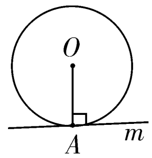


图 2-25-1

$\left.\begin{array}{l}OA \text{ 为} \odot O \text{ 的半径} \\ OA \perp m\text{,垂足为点 } A\end{array}\right\} \Rightarrow m$ 与 $\odot O$ 相切于点 A

2. 与切线的判定有关的辅助线

(1)直线与圆有公共点,则连接圆心与公共点,证明半径垂直于直线即可。简记:有公共点,连半径,证垂直,得切线。

(2)直线与圆未标明公共点,则由圆心作已知直线的垂线段,证明垂线段长等于半径。简记:无公共点,作垂直,证相等,得切线。

经典试题解析

知识点1 与切线性质有关的证明和计算

例1 (2023·广元中考)如图 2-25-2,AB 为 $\odot O$ 的直径,C 为 $\odot O$ 上一点,连接 AC,BC,过点 C 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 D,$OF \perp BC$,垂足为点 E,交 CD 于点 F。

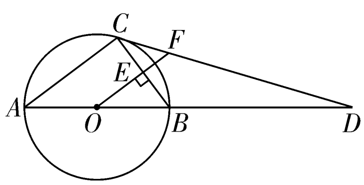


图 2-25-2

(1)求证:$\angle BCD = \angle BOE$;

(2)若 $\sin \angle CAB = \dfrac{3}{5}$,$AB = 10$,求 BD 的长。

思路分析 (1)连接 OC,利用圆周角定理及半径相等求得 $\angle OAC + \angle OCB = 90°$,根据切线的性质求得 $\angle BCD + \angle OCB = \angle OCD = 90°$,推出 $\angle BCD = \angle OAC$,再证明 $OE /\!/ AC$,根据平行线的性质即可证明结论成立;

(2)先求得 $BC = 6$,$AC = 8$,设 $BD = x$,证明 $\triangle BCD \backsim \triangle CAD$,利用相似三角形的性质计算即可。

解 (1)证明:如图 2-25-3,连接 OC。

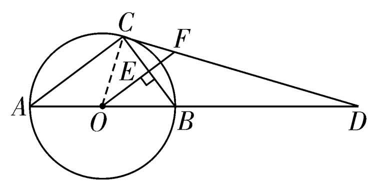


图 2-25-3

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACO + \angle OCB = \angle ACB = 90°$。

$\because OC = OA$,

$\therefore \angle OCA = \angle OAC$,

$\therefore \angle OAC + \angle OCB = 90°$。

$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle BCD + \angle OCB = \angle OCD = 90°$,

$\therefore \angle BCD = \angle OAC$。

$\because OF \perp BC$,

$\therefore \angle OEB = \angle ACB = 90°$,

$\therefore OE /\!/ AC$,

$\therefore \angle BOE = \angle OAC$,

$\therefore \angle BCD = \angle BOE$。

(2)解:$\because AB$ 为$\odot O$的直径,

$\therefore \angle ACB = 90°$。

$\because \sin\angle CAB = \frac{3}{5}$, $AB = 10$,

$\therefore \sin\angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$,

$\therefore BC = 6$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 8$。

设 $BD = x$,则 $AD = 10 + x$,

由(1)得$\angle BCD = \angle CAD$,

又$\angle D = \angle D$,

$\therefore \triangle BCD \backsim \triangle CAD$,

$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$,即$\frac{6}{8} = \frac{CD}{10+x} = \frac{x}{CD}$,

解得 $x = \frac{90}{7}$,

$\therefore BD$ 的长为$\frac{90}{7}$。

知识点 2　与切线判定有关的证明和计算

例 2　(2023 · 聊城中考)如图 2-25-4,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90°$,$\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D,$\angle ADC$ 的平分线 DE 交 AC 于点 E。以 AD 上的点 O 为圆心,OD 长为半径作$\odot O$,恰好过点 E。

(1)求证:AC 是$\odot O$的切线;

(2)若 $CD = 12$, $\tan\angle ABC = \frac{3}{4}$,求$\odot O$的半径。

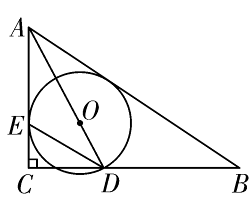


图 2-25-4

思路分析　(1)连接 OE,由题意得到 $OD = OE$,根据等腰三角形和角平分线的性质易得$\angle OED = \angle CDE$,根据平行线的判定定理得到 $OE /\!/ CD$,由$\angle ACB = 90°$,得到 $OE \perp AC$,即可证明;

(2)过 D 作 $DF \perp AB$,根据角平分线的性质易得 $CD = DF$,根据锐角三角函数和勾股定理得到 $BD = \sqrt{DF^2 + BF^2} = 20$,求得 $AC = BC \cdot \tan\angle ABC = 24$,利用勾股定理求得 AD 的长,再根据相似三角形的判定和性质定理即可得到结论。

解　(1)证明:如图 2-25-5,连接 OE。

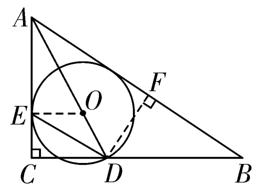


图 2-25-5

$\because OD = OE$,

$\therefore \angle OED = \angle ODE$。

$\because DE$ 平分$\angle ADC$,

$\therefore \angle CDE = \angle ODE$,

$\therefore \angle OED = \angle CDE$,

$\therefore OE /\!/ CD$。

$\because \angle ACB = 90°$,

$\therefore \angle AEO = 90°$,

$\therefore OE \perp AC$,

$\therefore AC$ 是$\odot O$的切线。

(2)解:如图 2-25-5,过 D 作 $DF \perp AB$,垂足为 F。

$\because AD$ 平分$\angle BAC$, $DF \perp AB$, $\angle ACB = 90°$,

$\therefore CD = DF$。

$\because CD = 12$, $\tan\angle ABC = \frac{3}{4}$,

$\therefore BF=\dfrac{DF}{\tan\angle ABC}=16$,

$\therefore$ 在 Rt $\triangle DFB$ 中, $BD=\sqrt{DF^2+BF^2}=20$,

$\therefore BC=CD+BD=32$,

$\therefore AC=BC\cdot\tan\angle ABC=24$,

$\therefore$ 在 Rt $\triangle ACD$ 中, $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=12\sqrt{5}$。

$\because OE\,/\!/\,CD$,

$\therefore \triangle AEO\backsim\triangle ACD$,

$\therefore \dfrac{EO}{CD}=\dfrac{AO}{AD}$,

$\therefore \dfrac{EO}{12}=\dfrac{12\sqrt{5}-OD}{12\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}-EO}{12\sqrt{5}}$,

解得 $EO=15-3\sqrt{5}$,

$\therefore \odot O$ 的半径为 $15-3\sqrt{5}$。

陕西中考链接

1.(2023·陕西中考)如图 2-25-6,$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle BAC=45°$,过点 B 作 BC 的垂线交 $\odot O$ 于点 D,并与 CA 的延长线交于点 E,作 $BF\perp AC$,垂足为 M,交 $\odot O$ 于点 F。

(1)求证:$BD=BC$;

(2)若 $\odot O$ 的半径 $r=3$, $BE=6$,求线段 BF 的长。

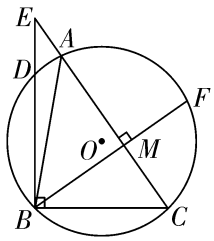
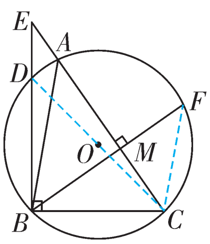


图 2-25-6

(1)证明:如图,连接 DC,



$\therefore \angle BDC=\angle BAC=45°$。

$\because BD\perp BC$,

$\therefore \angle BCD=90°-\angle BDC=45°$,

$\therefore \angle BCD=\angle BDC$,

$\therefore BD=BC$。

(2)解:$\because \angle DBC=90°$,

$\therefore CD$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore CD=2r=6$,

$\therefore BC=CD\cdot\sin\angle BDC=6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$,

$\therefore$ 在 Rt $\triangle EBC$ 中, $EC=\sqrt{BE^2+BC^2}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{6}$。

$\because BF\perp AC$,

$\therefore \angle BMC=\angle EBC=90°$, $\angle BCM=\angle BCM$,

$\therefore \triangle BCM\backsim\triangle ECB$,

$\therefore \dfrac{BC}{EC}=\dfrac{BM}{EB}=\dfrac{CM}{CB}$,

$\therefore BM=\dfrac{BC\cdot EB}{EC}=\dfrac{3\sqrt{2}\times 6}{3\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$, $CM=\dfrac{BC^2}{EC}=\dfrac{(3\sqrt{2})^2}{3\sqrt{6}}=\sqrt{6}$,

如图,连接 CF, $\angle F=\angle BAC=45°$,则 $\angle MCF=45°$,

$\therefore MF=MC=\sqrt{6}$,

$\therefore BF = BM + MF = 2\sqrt{3}+\sqrt{6}$。

2.（2022·陕西中考）如图2-25-7，AB是$\odot O$的直径，AM是$\odot O$的切线，AC，CD是$\odot O$的弦，且$CD\perp AB$，垂足为E，连接BD并延长，交AM于点P。

（1）求证：$\angle CAB=\angle APB$；

（2）若$\odot O$的半径$r=5$，$AC=8$，求线段PD的长。

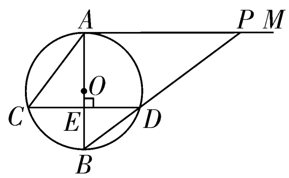


图2-25-7

（1）证明：$\because AM$是$\odot O$的切线，

$\therefore \angle BAM=90°$。

$\because CD\perp AB$，

$\therefore \angle CEA=90°$，

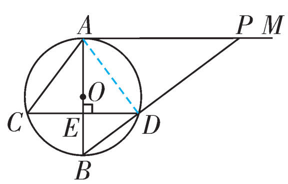
$\therefore AM/\!/CD$，

$\therefore \angle CDB=\angle APB$。

$\because \angle CAB=\angle CDB$，

$\therefore \angle CAB=\angle APB$。

（2）解：如图，连接AD。



$\because AB$为$\odot O$的直径，

$\therefore \angle ADB=90°$，

$\therefore \angle CDB+\angle ADC=90°$。

$\because \angle CAB+\angle C=90°$，$\angle CDB=\angle CAB$，

$\therefore \angle ADC=\angle C$，

$\therefore AD=AC=8$。

$\because AB=2r=10$，

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=6$。

$\because \angle BAP=\angle BDA=90°$，$\angle ABD=\angle PBA$，

$\therefore \triangle ADB\backsim\triangle PAB$，

$\therefore \dfrac{AB}{PB}=\dfrac{BD}{AB}$，

$\therefore PB=\dfrac{AB^2}{BD}=\dfrac{100}{6}=\dfrac{50}{3}$。

3.（2021·陕西中考）如图2-25-8，AB是$\odot O$的直径，点E，F在$\odot O$上，且$\overset{\frown}{BF}=2\overset{\frown}{BE}$，连接$OE$，$AF$，过点$B$作$\odot O$的切线，分别与$OE$，$AF$的延长线交于点$C$，$D$。

（1）求证：$\angle COB=\angle A$；

（2）若$AB=6$，$CB=4$，求线段FD的长。

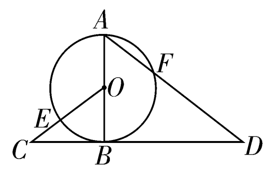
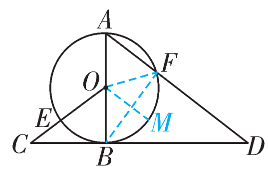


图2-25-8

（1）证明：如图，取$\overset{\frown}{BF}$的中点M，连接OM，OF。



$\because \overset{\frown}{BF}=2\overset{\frown}{BE}$，

$\therefore \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{MF}=\overset{\frown}{BE}$，

$\therefore \angle COB=\dfrac{1}{2}\angle BOF$。

$\because \angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOF$，

$\therefore \angle COB=\angle A$。

（2）解：连接BF，如图。

$\because CD$为$\odot O$的切线，

$\therefore AB\perp CD$，

$\therefore \angle OBC=\angle ABD=90°$。

$\because \angle COB=\angle A$，

$\therefore \triangle OBC \backsim \triangle ABD$，

$\therefore \dfrac{OB}{AB}=\dfrac{BC}{BD}$，即$\dfrac{3}{6}=\dfrac{4}{BD}$，

解得 $BD=8$。

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$。

$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle AFB=90^\circ$。

$\because \angle BDF=\angle ADB$，

$\therefore$ Rt$\triangle DBF \backsim$ Rt$\triangle DAB$，

$\therefore \dfrac{DF}{DB}=\dfrac{DB}{DA}$，即$\dfrac{DF}{8}=\dfrac{8}{10}$，解得 $DF=\dfrac{32}{5}$。

核心素养培优

1. (2021·嘉兴中考)已知平面内有$\odot O$和点 A，B，若$\odot O$ 的半径为 2 cm，线段 $OA=3$ cm，$OB=2$ cm，则直线 AB 与$\odot O$ 的位置关系为 (D)

A. 相离　　B. 相交

C. 相切　　D. 相交或相切

2. (2023·河南中考)如图 2-25-9，PA 与$\odot O$ 相切于点 A，PO 交$\odot O$ 于点 B，点 C 在 PA 上，且 $CB=CA$。若 $OA=5$，$PA=12$，则 CA 的长为 $\underline{\dfrac{10}{3}}$。

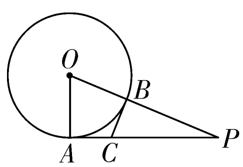


图 2-25-9

3. (2023·鹤岗中考)如图 2-25-10，AB 是$\odot O$ 的直径，PA 切$\odot O$ 于点 A，PO 交$\odot O$ 于点 C，连接 BC。若$\angle B=28^\circ$，则$\angle P=$ $\underline{34}$°。

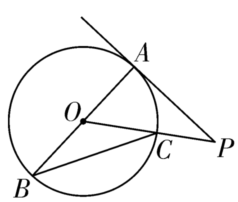


图 2-25-10

4. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，OA 平分$\angle BAC$ 交 BC 于点 O，以 O 为圆心，OC 长为半径作圆交 BC 于点 D。

(1) 如图 2-25-11①，求证：AB 为$\odot O$ 的切线；

(2) 如图 2-25-11②，AB 与$\odot O$ 相切于点 E，连接 CE 交 OA 于点 F。试判断线段 OA 与 CE 的关系，并说明理由。

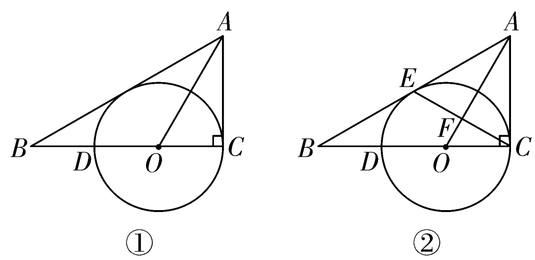
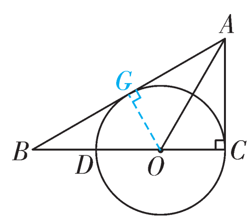


图 2-25-11

(1) 证明：如图，过点 O 作 $OG\perp AB$，垂足为 G。



$\because OA$ 平分$\angle BAC$ 交 BC 于点 O，

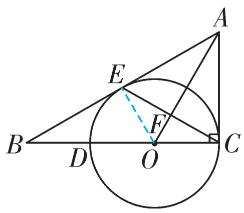
$\therefore OG=OC$，

$\therefore$ 点 G 在$\odot O$ 上，

$\therefore AB$ 为$\odot O$ 的切线。

(2) 解：OA 垂直平分 CE，理由如下：

如图，连接 OE。



$\because AB$ 与 $\odot O$ 相切于点 E，$\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore AE=AC$。

$\because OE=OC$，

$\therefore OA$ 垂直平分 CE。

5. (2023·连云港中考)如图 2-25-12，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交边 AC 于点 D，连接 BD，过点 C 作 $CE/\!/AB$。

(1)请用无刻度的直尺和圆规作图：过点 B 作 $\odot O$ 的切线，交 CE 于点 F；(不写作法，保留作图痕迹，标明字母)

(2)在(1)的条件下，求证：$BD=BF$。

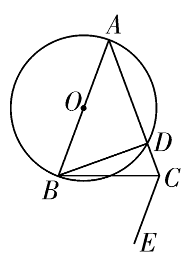
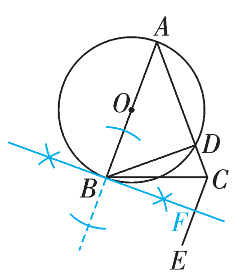


图 2-25-12

(1)解：如图，直线 BF 即为所求直线。



(2)证明：$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$。

$\because AB/\!/CE$，

$\therefore \angle ABC=\angle BCF$，

$\therefore \angle BCF=\angle ACB$。

$\because$ 点 D 在以 AB 为直径的圆上，

$\therefore \angle ADB=90^\circ$，

$\therefore \angle BDC=90^\circ$。

$\because BF$ 为 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle ABF=90^\circ$。

$\because AB/\!/CE$，

$\therefore \angle BFC+\angle ABF=180^\circ$，

$\therefore \angle BFC=90^\circ$，

$\therefore \angle BDC=\angle BFC$。

在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$$\begin{cases}\angle BDC=\angle BFC,\\ \angle DCB=\angle FCB,\\ BC=BC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BCD\cong\triangle BCF(\mathrm{AAS})$，

$\therefore BD=BF$。

6. (2023·福建中考)如图 2-25-13，已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，CO 的延长线交 AB 于点 D，交 $\odot O$ 于点 E，交 $\odot O$ 的切线 AF 于点 F，且 $AF/\!/BC$。

(1)求证：$AO/\!/BE$；

(2)求证：AO 平分 $\angle BAC$。

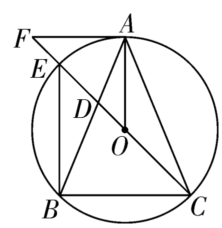


图 2-25-13

证明：(1)$\because AF$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore AF\perp OA$，

$\therefore \angle OAF=90^\circ$。

$\because CE$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle CBE=90^\circ$，

$\therefore \angle OAF=\angle CBE$。

$\because AF/\!/BC$，

$\therefore \angle BAF=\angle ABC$，

$\therefore \angle OAF-\angle BAF=\angle CBE-\angle ABC$，

$\therefore \angle OAB=\angle ABE$，

$\therefore AO /\!/ BE$。

(2)$\because \angle ABE$ 与 $\angle ACE$ 都是$\overset{\frown}{EA}$所对的圆周角，

$\therefore \angle ABE=\angle ACE$。

$\because OA=OC$，

$\therefore \angle ACE=\angle OAC$，

$\therefore \angle ABE=\angle OAC$，

由(1)知，$\angle OAB=\angle ABE$，

$\therefore \angle OAB=\angle OAC$，

$\therefore AO$ 平分$\angle BAC$。

7. (2023·乐山中考)如图 2-25-14，已知$\odot O$ 是 Rt$\triangle ABC$ 的外接圆，$\angle ACB=90°$，D 是圆上一点，E 是 DC 延长线上一点，连接 AD，AE，且 $AD=AE$，$CA=CE$。

(1)求证：直线 AE 是$\odot O$ 的切线；

(2)若 $\sin E=\dfrac{2}{3}$，$\odot O$ 的半径为 3，求 AD 的长。

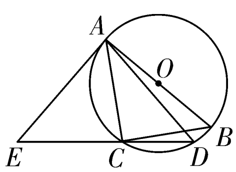


图 2-25-14

(1)证明：$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore AB$ 是$\odot O$ 的直径。

$\because AD=AE$，

$\therefore \angle E=\angle D$。

$\because \angle B=\angle D$，

$\therefore \angle E=\angle B$。

$\because CA=CE$，

$\therefore \angle E=\angle CAE$，

$\therefore \angle CAE=\angle B$，

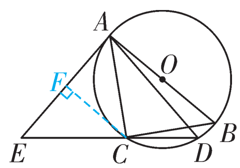
$\therefore \angle OAE=\angle CAE+\angle CAB=\angle B+\angle CAB=90°$，

$\therefore AE\perp OA$。

$\because OA$ 是$\odot O$ 的半径，

$\therefore$ 直线 AE 是$\odot O$ 的切线。

(2)解：如图，作 $CF\perp AE$，垂足为点 F，则$\angle CFE=90°$，



$\because \angle E=\angle CAE=\angle B$，

$\therefore \dfrac{CA}{AB}=\sin B=\sin E=\dfrac{CF}{CE}=\dfrac{2}{3}$。

$\because OA=OB=3$，

$\therefore AB=6$，

$\therefore CE=CA=\dfrac{2}{3}AB=\dfrac{2}{3}\times 6=4$，

$\therefore CF=\dfrac{2}{3}CE=\dfrac{2}{3}\times 4=\dfrac{8}{3}$，

$\therefore AF=EF=\sqrt{CE^2-CF^2}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{8}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore AD=AE=2AF=2\times\dfrac{4\sqrt{5}}{3}=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore AD$ 的长是$\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$。

第 26 讲　与圆有关的计算

重难点突破

重点 1　正多边形与圆的关系

1. 各边相等的圆内接多边形是正多边形，但各角相等的圆内接多边形不一定是正多边形（如矩形）。

2. 任意多边形（边数大于 3 ）不一定具有外接圆和内切圆，但当多边形是正多边形时，则一定有外接圆和内切圆，并且是同心圆。

3. 关于正多边形的一些常用值：

正多边形边数	内角	中心角	外接圆半径	边长	边心距	周长	面积
3	60°	120°	2	$2\sqrt{3}$	1	$6\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
4	90°	90°	$\sqrt{2}$	2	1	8	4
6	120°	60°	2	2	$\sqrt{3}$	12	$6\sqrt{3}$

重点 2　应用弧长计算公式的注意事项

弧长公式：$l=\frac{n\pi R}{180}$（l 为弧长，$n°$为圆心角度数，R 为圆的半径）。

（1）在弧长的计算公式中，n 是表示 1°的圆心角的倍数，n 和 180 都不要带单位；

（2）若圆心角的单位有度，分，秒，则需要先化为度后再计算弧长；

（3）题设未标明精确度的，可以将弧长用 π 表示；

（4）弧的度数等于这条弧所对的圆心角的度数。

重点 3　应用扇形面积求阴影面积的方法

扇形面积计算公式为 $S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{1}{2}lR$（其中 R 为圆的半径，l 为扇形的弧长）；用扇形面积公式求阴影面积时，若阴影部分是规则图形可直接用公式求其面积（注意找好圆心角）；若阴影部分不是规则图形，则需要将其转化为规则图形，再进行面积计算，常用的转化方法是：公式法；拼凑法；等积变形法；割补法；构造方程法等。

经典试题解析

知识点 1　正多边形和圆的有关计算

例 1　（2023 · 娄底中考）如图 2-26-1，正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆 ⊙O 的半径为 2，过圆心 O 的两条直线 l_1，l_2 的夹角为 60°，则图中的阴影部分的面积为　　　（　　）

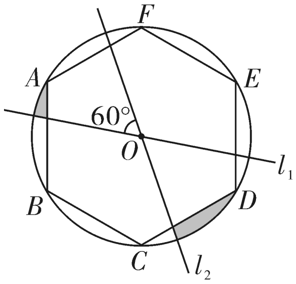


图 2-26-1

A. $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$　　B. $\frac{4}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$　　D. $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

思路分析 连接 AD，CO，由正六边形的性质得 A，O，D 三点共线，$\triangle COD$ 为等边三角形，证明 $S_{扇形AON}=S_{扇形COM}$，可得 $S_{阴影}=S_{扇形COD}-S_{\triangle COD}$，计算可得答案。

解答 如图 2-26-2，连接 AD，CO，记直线 l_1 与 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{DE}$分别交于点 N，H，交 AB 于点 G，直线 l_2 交$\overset{\frown}{CD}$于点 M，交 CD 于点 K，由正六边形的性质可得 A，O，D 三点共线，$\triangle COD$ 为等边三角形，

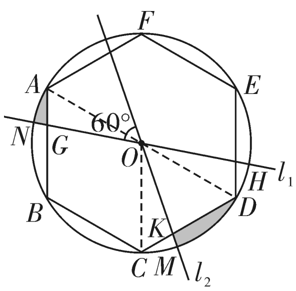


图 2-26-2

$\therefore \angle AON=\angle DOH$，$\angle COD=\angle MOH=60°$，

$\therefore \angle COM=\angle DOH=\angle AON$。

又$\because \angle OCD=\angle OAB=60°$，$OC=OA$，

$\therefore \triangle OCK\cong\triangle OAG(\text{ASA})$，

$\therefore S_{扇形AON}=S_{扇形COM}$，

$\therefore S_{扇形AON}-S_{\triangle OAG}=S_{扇形COM}-S_{\triangle OCK}$，

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形COD}-S_{\triangle COD}$。

$\because \triangle COD$ 为等边三角形，$OC=OD=2$，

$\therefore S_{\triangle COD}=\frac{\sqrt{3}}{4}OC^2=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形COD}-S_{\triangle COD}=\frac{60\pi\times2^2}{360}-\sqrt{3}$

$=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$。

故选 C。

知识点 2　弧长的计算

例 2 （2023 · 金华中考）如图 2-26-3，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=6$ cm，$\angle BAC=50°$，以 AB 为直径作半圆，交 BC 于点 D，交 AC 于点 E，则弧 DE 的长为________cm。

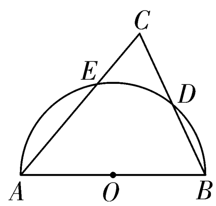


图 2-26-3

思路分析 连接 OE，OD，先由半径相等和等腰三角形的性质得$\angle C=\angle ODB$，再由平行线的判定定理推出 $OD//AC$，求出弧 DE 所对的圆心角度数和所在圆的半径，最后再根据弧长公式计算即可。

解答 如图 2-26-4，连接 OE，OD。

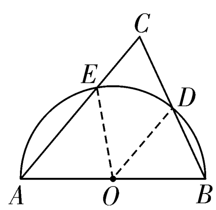


图 2-26-4

$\because OD=OB$，

$\therefore \angle B=\angle ODB$。

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$，

$\therefore \angle C=\angle ODB$,

$\therefore OD /\!/ AC$,

$\therefore \angle EOD=\angle AEO$。

$\because OE=OA$,

$\therefore \angle OEA=\angle BAC=50°$,

$\therefore \angle EOD=\angle BAC=50°$。

$\because OD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 6=3(\mathrm{cm})$,

$\therefore \overset{\frown}{DE}$的长$=\frac{50\pi\times 3}{180}=\frac{5}{6}\pi(\mathrm{cm})$。

故答案为$\frac{5}{6}\pi$。

核心素养培优

1. 图 2-26-5 是一圆形纸片，A,B,C 为圆周上三点，其中 AC 为直径，现以 AB 为折线将纸片向右折叠后，纸片盖住部分的 AC，而$\overset{\frown}{AB}$上与 AC 重叠的点为 D。若$\overset{\frown}{BC}=35°$，则$\overset{\frown}{AD}$的度数是　（ B ）

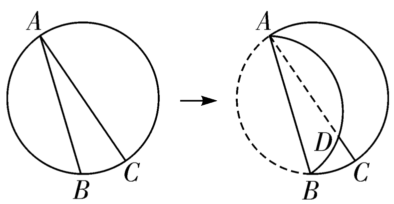


图 2-26-5

A. 105°　　B. 110°

C. 120°　　D. 145°

2. (2023 · 内江中考) 如图 2-26-6，正六边形 $ABCDEF$ 内接于$\odot O$，点 P 在$\overset{\frown}{AB}$上，点 Q 是$\overset{\frown}{DE}$的中点，则$\angle CPQ$ 的度数为　（ B ）

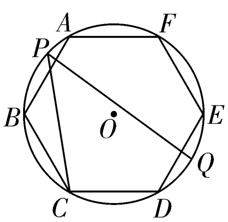


图 2-26-6

A. 30°　B. 45°　C. 36°　D. 60°

3. (2023 · 广安中考) 如图 2-26-7，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=2\sqrt{2}$，以点 A 为圆心，AC 长为半径画弧，交 AB 于点 E，以点 B 为圆心，BC 长为半径画弧，交 AB 于点 F，则图中阴影部分的面积是　（ C ）

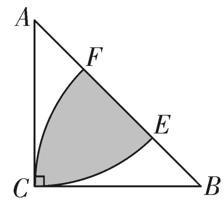


图 2-26-7

A. $\pi-2$　　B. $2\pi-2$

C. $2\pi-4$　　D. $4\pi-4$

4. (2023 · 荆州中考) 如图 2-26-8，一条公路的转弯处是一段圆弧($\overset{\frown}{AC}$)，点 O 是这段弧所在圆的圆心，B 为$\overset{\frown}{AC}$上一点，$OB\perp AC$，垂足为 D。若 $AC=300\sqrt{3}$ m，$BD=150$ m，则$\overset{\frown}{AC}$的长为　（ B ）

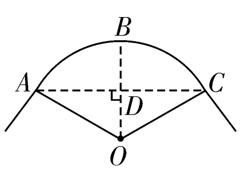


图 2-26-8

A. 300π m　　B. 200π m

C. 150π m　　D. $100\sqrt{3}\pi$ m

5. (2023 · 扬州中考) 用半径为 24 cm，

面积为 $120\ \pi\ cm^2$ 的扇形纸片，围成一个圆锥的侧面，则这个圆锥的底面圆的半径为 $\underline{\quad 5 \quad}$ cm。

6. （2023 · 重庆中考）如图 2-26-9，⊙O 是矩形 $ABCD$ 的外接圆，若 $AB=4$，$AD=3$，则图中阴影部分的面积为 $\underline{\ \frac{25}{4}\pi-12\ }$。（结果保留 π）

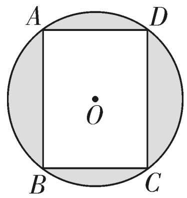


图 2-26-9

7. （2023 · 重庆中考）如图 2-26-10，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=4$，E 为 BC 的中点，连接 AE，DE。以 E 为圆心，EB 长为半径画弧，分别与 AE，DE 交于点 M，N。则图中阴影部分的面积为 $\underline{\ 4-\pi\ }$。（结果保留 π）

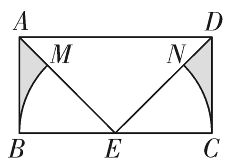


图 2-26-10

8. （2023 · 齐齐哈尔中考）如图 2-26-11，在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D，点 E 是斜边 AC 上一点，以 AE 为直径的 ⊙O 经过点 D，交 AB 于点 F，连接 DF。

（1）求证：BC 是⊙O 的切线；

（2）若 $BD=5$，$\tan\angle ADB=\sqrt{3}$，求图中阴影部分的面积。（结果保留 π）

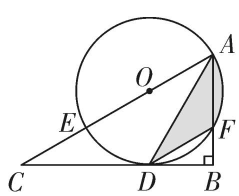
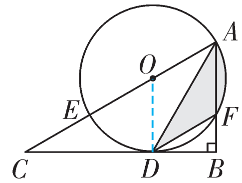


图 2-26-11

（1）证明：如图，连接 OD。



$\because$ OA，OD 是⊙O 的半径，

$\therefore$ $OA=OD$，

$\therefore$ $\angle OAD=\angle ODA$。

$\because$ AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore$ $\angle OAD=\angle BAD$，

$\therefore$ $\angle ODA=\angle BAD$，

$\therefore$ $OD /\!/ AB$，

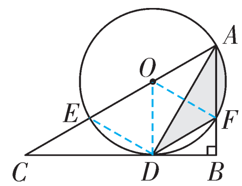
$\therefore$ $\angle ODC=\angle B=90°$，

$\therefore$ $OD\perp BC$。

又$\because$ OD 为⊙O 的半径，

$\therefore$ BC 是⊙O 的切线。

（2）解：如图，连接 OF，DE。



$\because$ 在 Rt△ABD 中，$\angle B=90°$，$\tan\angle ADB=\sqrt{3}$，

$\therefore$ $\angle ADB=60°$，$\angle BAD=30°$。

$\because$ $BD=5$，

$\therefore$ $AD=2BD=10$。

$\because$ AE 是⊙O 的直径，

$\therefore$ $\angle ADE=90°$。

$\because$ AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore$ $\angle DAE=\angle BAD=30°$。

在 Rt△ADE 中，$AD=10$，

$\therefore$ $AE=\dfrac{AD}{\cos 30°}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ $OA=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$。

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle BAC = 2\angle BAD = 60°$。

$\because OA = OF$，

$\therefore \triangle AOF$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AOF = 60°$。

由(1)得 $OD /\!/ AB$，

$\therefore S_{\triangle ADF} = S_{\triangle AOF}$，

$\therefore S_{阴影} = S_{扇形AOF} = \dfrac{60\pi \times \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2}{360} = \dfrac{50\pi}{9}$。

第 27 讲　尺规作图

重难点突破

重　点　作图重要依据以及相关定理

1. 作线段的垂直平分线：到线段两端点的距离相等的点在线段的垂直平分线上。

2. 作角平分线：在角的内部，到角的两边距离相等的点在角的平分线上。

3. 作角相等：两直线平行，内错角相等或同位角相等，等边对等角等。

经典试题解析

知识点 1　尺规作图与圆的结合

例 1　如图 2-27-1，已知扇形 AOB。请用尺规作图，在弧 AB 上求作一点 P，使 $PA = PB$。(保留作图痕迹，不写作法)

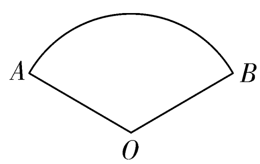


图 2-27-1

思路分析　将问题转化为求圆弧的中点，也就是求圆弧所对圆心角的角平分线与圆弧的交点或求圆弧所对弦的垂直平分线与圆弧的交点。

解　如图 2-27-2 ①②，点 P 即为所求。

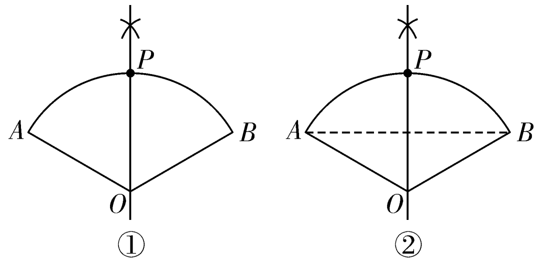


图 2-27-2

知识点 2　尺规作图与特殊三角形的结合

例 2　如图 2-27-3，已知正方形 $ABCD$，请用尺规作图法，在边 BC 上求作一点 P，使 $\angle PAB = 30°$。(保留作图痕迹，不写作法)

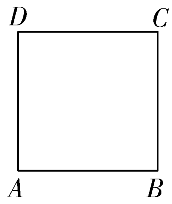


图 2-27-3

思路分析 根据正方形每一个内角都是直角的性质，直角的顶点处要得出一个30°角，可考虑同顶点处的另外一个角是60°，进而联系等边三角形即可求解。

解 解法一：如图 2-27-4，点 P 即为所求。

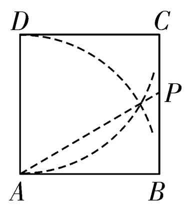


图 2-27-4

解法二：如图 2-27-5，点 P 即为所求。

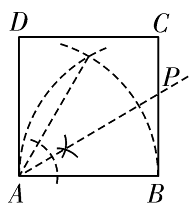


图 2-27-5

知识点 3 条件转化类尺规作图

例 3 如图 2-27-6，已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，AC 为其对角线，$AB \perp AC$，且 $AC < AD$，请在 AD 边上找一点 E，使得 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$。（保留作图痕迹，不写作法）

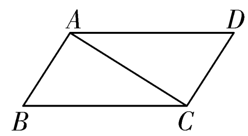


图 2-27-6

思路分析 本题为条件转化类尺规作图，经过分析，点 E 是 AD 的中点，由此作图。

解 解法一：如图 2-27-7，点 E 即为所求。

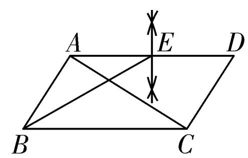


图 2-27-7

解法二：如图 2-27-8，点 E 即为所求。

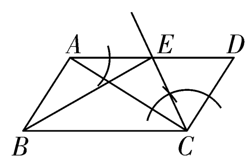


图 2-27-8

陕西中考链接

1. （2023 · 陕西中考）如图 2-27-9，已知 $\triangle ABC$，$\angle B = 48°$，请用尺规作图法，在 $\triangle ABC$ 内部求作一点 P，使 $PB = PC$，且 $\angle PBC = 24°$。（保留作图痕迹，不写作法）

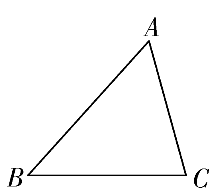
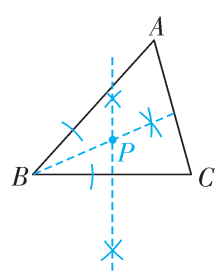


图 2-27-9

解：如图，点 P 即为所求。



2. （2022 · 陕西中考）如图 2-27-10，已知 $\triangle ABC$，$CA = CB$，$\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外

角。请用尺规作图法，求作射线 CP，使 $CP//AB$。（保留作图痕迹，不写作法）

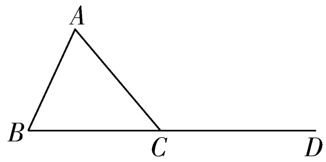
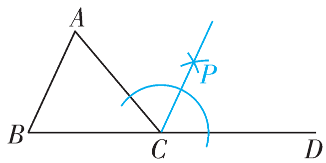


图 2-27-10

解：如图，射线 CP 即为所求。



3.（2021·陕西中考）如图 2-27-11，已知直线 $l_1//l_2$，直线 l_3 分别与 l_1，l_2 交于点 A，B。请用尺规作图法，在线段 AB 上求作一点 P，使点 P 到 l_1，l_2 的距离相等。（保留作图痕迹，不写作法）

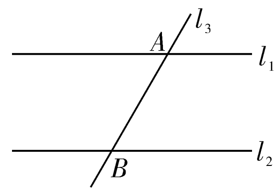
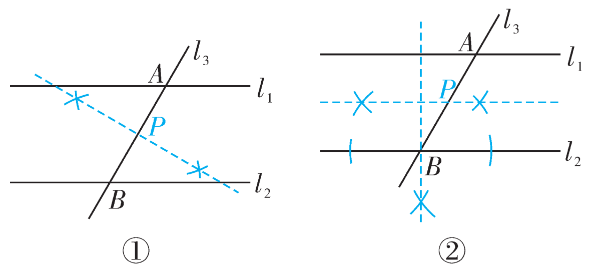


图 2-27-11

解：如图①②，点 P 即为所求。



核心素养培优

1. 如图 2-27-12，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，按以下步骤作图：①以点 A 为圆心，以任意长为半径作弧，分别交 AC，AB 于点 M，N；②分别以 M，N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle BAC$ 内交于点 O；③作射线 AO，交 BC 于点 D。若点 D 到 AB 的距离为 1，则 BC 的长为 $\underline{\ 1+\sqrt{2}\ }$。

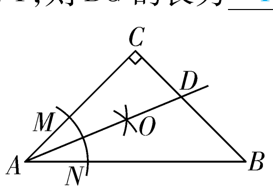


图 2-27-12

2.（2022·达州中考）如图 2-27-13，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=20°$，分别以点 A，B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧分别相交于点 M，N，作直线 MN，交 BC 于点 D，连接 AD，则 $\angle CAD$ 的度数为 $\underline{\ 50°\ }$。

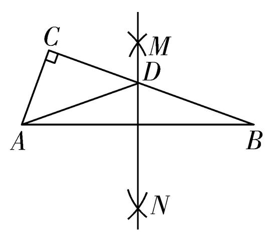


图 2-27-13

3. 如图 2-27-14，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=4$，$AB=8$。请用尺规作图法，在 CD 上求作点 P，使得△ADP 的面积为 6。（保留作图痕迹，不写作法）

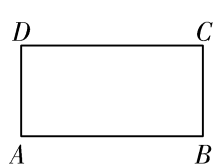
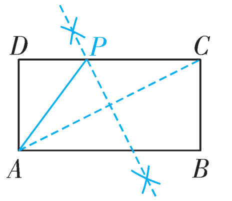


图 2-27-14

解：如图，点 P 即为所求。



4. 如图 2-27-15，在△ABC 中，D 为 BA 的中点，请用尺规在边 AC 上作一点 E，使△ADE 的周长为△ABC 周长的一半。（保留作图痕迹，不写作法）

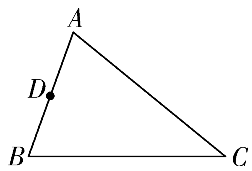
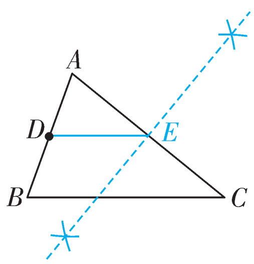


图 2-27-15

解：如图，点 E 即为所求。



5. (2022 · 绥化中考节选) 如图 2-27-16，在△ABC 中，用直尺和圆规作出△ABC 内切圆的圆心 O。（只保留作图痕迹，不写作法和证明）

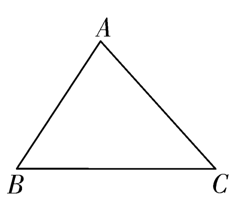
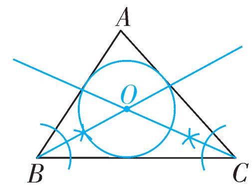


图 2-27-16

解：如图，点 O 即为所求作的圆心。



6. 如图 2-27-17，在△ABC 中，$AB = AC$，用尺规在 BC 边上求作一点 P，使△BPA∽△BAC。（保留作图痕迹，不写作法）

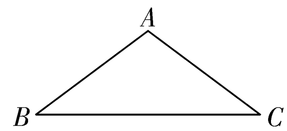
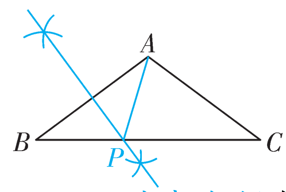


图 2-27-17

解：如图，点 P 即为所求。



7. (2022 · 无锡中考节选) 如图 2-27-18，△ABC 为锐角三角形，请在图中用无刻度的直尺和圆规作图：在 AC 右上方确定点 D，使∠DAC = ∠ACB，且 $CD \perp AD$。（不写作法，保留作图痕迹）

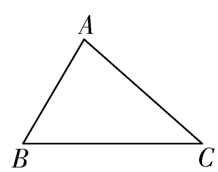
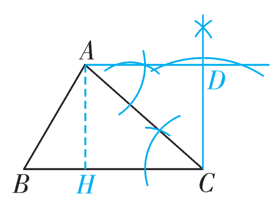


图 2-27-18

解：如图，点 D 即为所求。



8. (2022 · 黔东南州中考节选) 请在图 2-27-19 中作出△ABC 的外接圆⊙O。（尺规

作图,保留作图痕迹,不写作法)

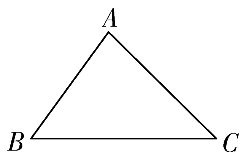
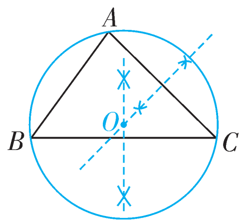


图 2-27-19

解:如图所示的⊙O 即为所求作的圆。



9. (2023 · 台州中考节选)如图 2-27-20,在四边形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,$\angle A=\angle C$,BD 为对角线。已知 $AD>AB$,请用无刻度的直尺和圆规作菱形 $BEDF$,顶点 E,F 分别在边 BC,AD 上。(保留作图痕迹,不要求写作法)

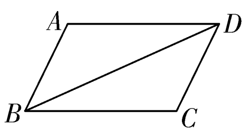
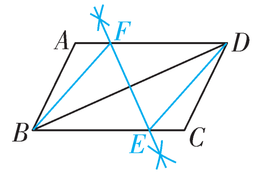


图 2-27-20

解:如图,四边形 $BEDF$ 为所求作的菱形。



10. (2023 · 绥化中考节选)已知:如图 2-27-21,点 P 是⊙O 外一点。过点 P 作出⊙O 的两条切线 PE,PF,切点分别为点 E,点 F。(保留作图痕迹,不要求写作法和证明)

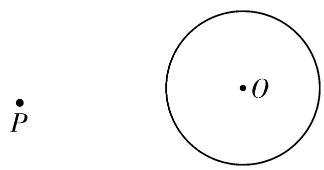
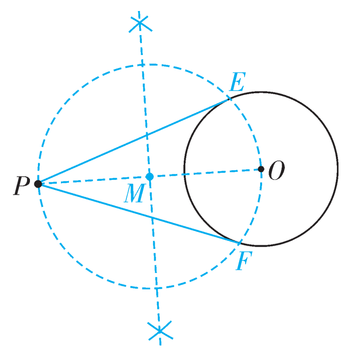


图 2-27-21

解:如图,PE,PF 即为所求。



第 28 讲　统计

重难点突破

重点 1　全面调查与抽样调查

1. 统计调查的方法有全面调查和抽样调查。

2. 全面调查与抽样调查的选择

(1)全面调查收集到的数据全面、准确,但一般花费多、耗时长,而且某些调查不宜用全面调查。全面调查适用于调查范围小,调查不具有破坏性的情况。

(2)抽样调查具有花费少、省时的特点,但抽取的样本是否具有广泛性和代表性,直接关系到对总体估计的准确程度。抽样调查适用于调查对象涉及面大、范围广或受条件限制或具有破坏性等情况。

重点2 统计图表

统计图表相关量的计算方法

(1)计算调查的样本容量:综合观察统计图表,从中得到各组的频数,或得到某组的频数及该组的频率(百分比),利用样本容量 = 各组频数之和 = $\frac{\text{某组的频数}}{\text{该组的频率(百分比)}}$计算即可。

(2)条形(直方)图:一般涉及补图,也就是求未知组的频数,方法如下:

①未知组频数 = 样本容量 − 已知组频数之和;

②未知组频数 = 样本容量 × 该组所占样本百分比。

(3)扇形统计图:一般涉及补图,也就是求未知组的百分比或未知组所占圆心角的度数,方法如下:

①未知组百分比 = 1 − 已知组百分比之和;

②未知组百分比 = $\frac{\text{未知组频数}}{\text{样本容量}} \times 100\%$;

③若求未知组在扇形统计图中圆心角的度数,利用 360° × 未知组所占百分比计算即可。

(4)折线统计图:一般涉及补图,根据统计表中未知组的数量(或根据题目条件求出未知组的数量),描点连线即可。

(5)频数分布直方图:

①各组频数之和等于抽样数据总数;

②各组频率之和等于 1;

③数据总数 × 各组的频率 = 相应组的频数。

(6)频数分布表:一般涉及求频数和频率(百分比),方法同上。

重点3 平均数、中位数和众数

1. 平均数反映一组数据的整体水平。与数据的排列位置无关,容易受到极端值的影响。在一组数据中,各个数在总结果中所占的百分比称为这个数的权重,每个数乘它相应的权重后所得的平均数叫作这组数据的加权平均数。

2. 中位数是将一组数据按大小依次排列,处在最中间位置的一个数据(或最中间两个数据的平均数),不易受极端值的影响,但不能充分利用所有数据的信息。

3. 求一组数据的众数的方法:找出频数最多的那个数据,若几个数据频数都是最多且相同,此时众数就是这多个数据。众数不易受极端值的影响。众数反映了一组数据的集中程度,众数可作为描述一组数据集中趋势的量。

重点4 方差

1. 用“先平均,再求差,然后平方,最后再平均”得到的结果表示一组数据偏离平均值的情况,这个结果叫作方差,通常用 s^2 来表示,计算公式是:

$$s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$$

。(可简记为“方差等于与平均数差方的平均数”)

2. 方差是反映一组数据的波动大小的一个量。方差越大,则各数据与平均值的离散程度越大,稳定性也越差;反之,则各数据与平均值的离散程度越小,稳定性越好。

经典试题解析

知识点 1　全面调查与抽样调查

例 1　（2023·浙江中考）在下面的调查中，最适合用全面调查的是　　　（　　）

A. 了解一批节能灯管的使用寿命

B. 了解某校 803 班学生的视力情况

C. 了解某省初中生每周上网时长情况

D. 了解京杭大运河中鱼的种类

思路分析　根据全面调查与抽样调查的特点，逐一判断即可解答。

解答　A. 了解一批节能灯管的使用寿命，应采用抽样调查的方式，故 A 选项不符合题意；

B. 了解某校 803 班学生的视力情况，应采用全面调查的方式，故 B 选项符合题意；

C. 了解某省初中生每周上网时长情况，应采用抽样调查的方式，故 C 选项不符合题意；

D. 了解京杭大运河中鱼的种类，应采用抽样调查的方式，故 D 选项不符合题意。

故选 B。

知识点 2　总体、个体、样本及样本容量

例 2　（2023·聊城中考）4 月 15 日是全民国家安全教育日。某校为了摸清该校 1 500名师生的国家安全知识掌握情况，从中随机抽取了 150 名师生进行问卷调查。这项调查中的样本是　　　（　　）

A. 1 500 名师生的国家安全知识掌握情况

B. 150

C. 从中抽取的 150 名师生的国家安全知识掌握情况

D. 从中抽取的 150 名师生

思路分析　总体是指考察的对象的全体，个体是总体中的每一个考察的对象，样本是总体中所抽取的一部分个体，据此即可判断。

解答　样本是所抽取的 150 名师生的国家安全知识掌握情况。故选 C。

知识点 3　几种常见的统计图表

例 3　（2023·绥化中考改编）绥化市举办了 2023 年半程马拉松比赛，赛后随机抽取了部分参赛者的成绩 x（单位：min），并制作了如下的参赛者成绩组别表、扇形统计图和频数分布直方图。则下列说法正确的是　　　（　　）

组别	参赛者成绩 x/min
A	$70\leqslant x<80$
B	$80\leqslant x<90$
C	$90\leqslant x<100$
D	$100\leqslant x<110$
E	$110\leqslant x<120$

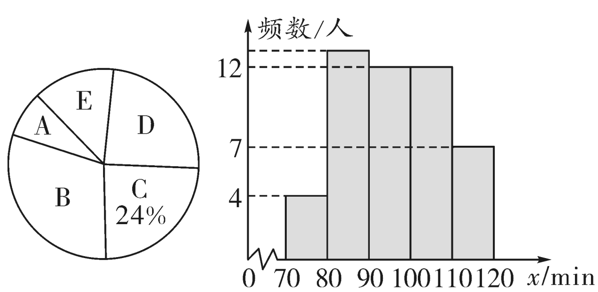


图 2-28-1

A. 该组数据的样本容量是 50 人

B. 该组数据的中位数落在 90—100 这一组

C. 80—90 这组数据所占百分比为 24%

D. 110—120 这组数据对应的扇形统计图的圆心角度数为 51°

思路分析 用 C 组的频数除以 24% 可得样本容量；根据中位数的定义和样本容量可得该组数据的中位数落在 90—100 这一组；用 80—90 这组数据的频数除以样本容量可得这组数据所占百分比；用 360°乘 110—120 这组数据所占比例可知这组数据对应的扇形统计图的圆心角度数。

解答 A. 该组数据的样本容量是 $12 \div 24\% = 50$，样本容量没有单位，原说法错误，故本选项不符合题意；

B. 80—90 这一组数据有 $50 - 4 - 7 - 12 \times 2 = 15$（人），所以该组数据的中位数落在 90—100 这一组，原说法正确，故本选项符合题意；

C. 80—90 这组数据所占百分比是 $\frac{15}{50} \times 100\% = 30\%$，原说法错误，故本选项不符合题意；

D. 110—120 这组数据对应的扇形统计图的圆心角度数为 $360° \times \frac{7}{50} = 50.4°$，原说法错误，故本选项不符合题意。

故选 B。

知识点 4 平均数、中位数和众数

例 4 （2023 · 湘潭中考）某校组织青年教师教学竞赛活动，包含教学设计和现场教学展示两个方面，其中教学设计占 20%，现场展示占 80%。某参赛教师的教学设计 90 分，现场展示 95 分，则她的最后得分为（　　）

A. 95 分　　B. 94 分

C. 92.5 分　　D. 91 分

思路分析 根据题目中的数据和加权平均数的计算方法，可以计算出最终得分。

解答 由题意可得，$90 \times 20\% + 95 \times 80\% = 94$（分），

即她的最后得分为 94 分，故选 B。

例 5 （2023 · 枣庄中考）4 月 23 日是世界读书日，学校举行“快乐阅读，健康成长”读书活动。小明随机调查了本校七年级 30 名同学近 4 个月内每人阅读课外书的数量，数据如下表所示：

人数	6	7	10	7
课外书数量/本	6	7	9	12

则阅读课外书数量的中位数和众数分别是（　　）

A. 8，9　　B. 10，9

C. 7，12　　D. 9，9

思路分析 利用中位数和众数的定义即可解决问题。

解 中位数为第 15 个和第 16 个的平均数为 $\frac{9+9}{2} = 9$，众数为 9。

故选 D。

知识点 5 方差

例 6 （2023 · 广西中考）甲、乙、丙、丁四名同学参加立定跳远训练，他们成绩的平均数相同，方差如下：$s_{甲}^2 = 2.1$，$s_{乙}^2 = 3.5$，$s_{丙}^2 = 9$，$s_{丁}^2 = 0.7$，则成绩最稳定的是（　　）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

思路分析 根据方差的意义解答即可。

解答 $\because s_{甲}^2 = 2.1$，$s_{乙}^2 = 3.5$，$s_{丙}^2 = 9$，$s_{丁}^2 = 0.7$，

$\therefore$ 丁的方差最小，

$\therefore$ 成绩最稳定的是丁。

故选 D。

陕西中考链接

1.(2023·陕西中考)某校数学兴趣小组的同学们从“校园农场”中随机抽取了20棵西红柿植株,并统计了每棵植株上小西红柿的个数。其数据如下:28,36,37,39,42,45,46,47,48,50,54,54,54,54,55,60,62,62,63,64。通过对以上数据的分析整理,绘制了如下统计图表:

分组	频数	组内小西红柿的总个数
$25\leqslant x<35$	1	28
$35\leqslant x<45$	n	154
$45\leqslant x<55$	9	452
$55\leqslant x<65$	6	366

频数分布直方图

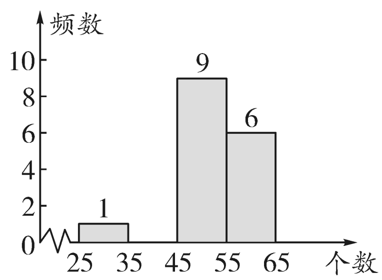


图 2-28-2

根据以上信息,解答下列问题:

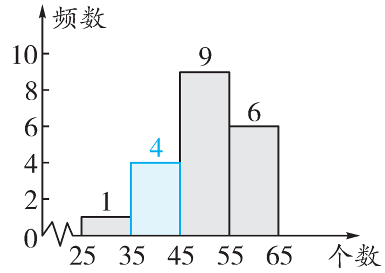
(1)补全频数分布直方图,这20个数据的众数是__54__;

(2)求这20个数据的平均数;

(3)“校园农场”中共有300棵这种西红柿植株,请估计这300棵西红柿植株上小西红柿的总个数。

解:(1)由题意得,$n=20-1-9-6=4$,补全频数分布直方图如图。

频数分布直方图



这20个数据中,54出现的次数最多,故众数为54。

故答案为54。

(2)$\bar{x}=\dfrac{1}{20}\times(28+154+452+366)=50$。

$\therefore$ 这20个数据的平均数是50。

(3)$50\times300=15\ 000$(个)。

$\therefore$ 这300棵西红柿植株上小西红柿的总个数约是15 000个。

2.(2022·陕西中考)某校为了了解本校学生“上周内做家务劳动所用的时间”(简称“劳动时间”)情况,在本校随机调查了100名学生的“劳动时间”,并进行统计,绘制了如下统计表:

组别	“劳动时间” t/min	频数	组内学生的平均“劳动时间”/min
A	$t<60$	8	50
B	$60\leqslant t<90$	16	75
C	$90\leqslant t<120$	40	105
D	$t\geqslant120$	36	150

根据上述信息,解答下列问题:

(1)这100名学生的“劳动时间”的中位

数落在<u> C </u>组；

（2）求这 100 名学生的平均“劳动时间”；

（3）若该校有 1 200 名学生，请估计在该校学生中，“劳动时间”不少于 90 min 的人数。

解：（2）$\bar{x}=\frac{1}{100}\times(50\times8+75\times16+105\times40+150\times36)=112(\text{min})$。

答：这 100 名学生的平均“劳动时间”为 112 min。

（3）$1\ 200\times\frac{40+36}{100}=912$（人）。

答：估计在该校学生中，“劳动时间”不少于 90 min 的人数为 912 人。

3.（2021·陕西中考）今年 9 月，第十四届全国运动会将在陕西省举行。本届全运会主场馆在西安，开幕式、闭幕式均在西安举行。某校气象兴趣小组的同学们想预估一下西安市今年 9 月份日平均气温状况。他们收集了西安市近五年 9 月份每天的日平均气温，从中随机抽取了 60 天的日平均气温，并绘制成如图 2-28-3 所示的统计图。

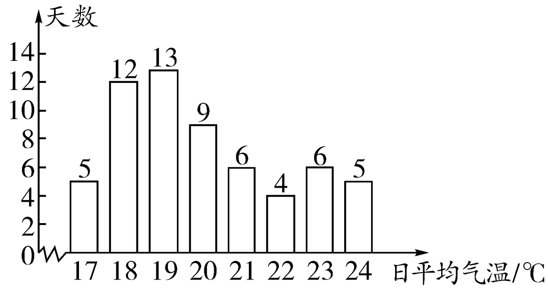


图 2-28-3

根据以上信息，回答下列问题：

（1）这 60 天的日平均气温的中位数为<u> 19.5 ℃ </u>，众数为<u> 19 ℃ </u>；

（2）求这 60 天的日平均气温的平均数；

（3）若日平均气温在 18 ℃—21 ℃的范围内（包含 18 ℃和 21 ℃）为“舒适温度”，请预估西安市今年 9 月份日平均气温为“舒适温度”的天数。

解：（2）这 60 天的日平均气温的平均数为$\frac{1}{60}\times(17\times5+18\times12+19\times13+20\times9+21\times6+22\times4+23\times6+24\times5)=20$（℃）。

（3）$\because \frac{12+13+9+6}{60}\times30=20$（天），

$\therefore$ 估计西安市今年 9 月份日平均气温为“舒适温度”的天数为 20 天。

核心素养培优

1.（2023·郴州中考）下列问题适合全面调查的是（ D ）

A. 调查市场上某品牌灯泡的使用寿命

B. 了解全市人民对湖南省第二届旅发大会的关注情况

C. 了解郴江河的水质情况

D. 神舟十六号飞船发射前对飞船仪器设备的检查

2.（2023·大连中考）某小学开展课后服务，其中在体育类活动中开设了四种运动项目：乒乓球、排球、篮球、足球。为了解学生最喜欢哪种运动项目，随机选取 100 名学

生进行问卷调查(每位学生仅选一种),并将调查结果绘制成如下的扇形统计图。下列说法错误的是　　(　D　)

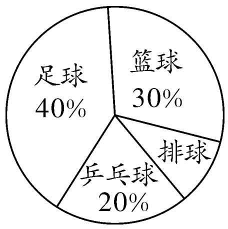


图 2-28-4

A. 本次调查的样本容量为 100

B. 最喜欢篮球的人数占被调查人数的 30%

C. 最喜欢足球的学生人数为 40 人

D. “排球”对应扇形的圆心角为 10°

3. (2023·徐州中考)徐州云龙山共九节,蜿蜒起伏,形似游龙,每节山的海拔如图 2-28-5 所示。其中,海拔为中位数的是　　(　C　)

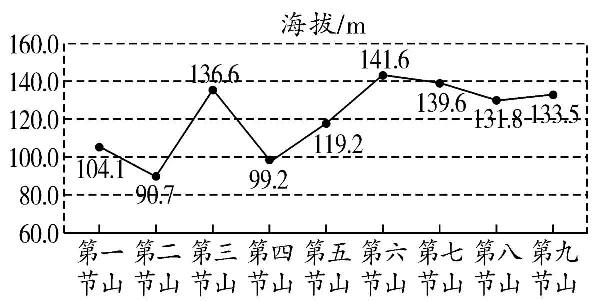


图 2-28-5

A. 第五节山　　B. 第六节山

C. 第八节山　　D. 第九节山

4. (2023·牡丹江中考)一组数据 1,x,5,7 有唯一众数,且中位数是 6,则平均数是　　(　B　)

A. 6　B. 5　C. 4　D. 3

5. (2023·随州中考)某班在开展劳动教育课程调查中发现,第一小组 6 名同学每周做家务的天数依次为 3,7,5,6,5,4(单位:天),则这组数据的众数和中位数分别为　　(　A　)

A. 5 和 5　　B. 5 和 4

C. 5 和 6　　D. 6 和 5

6. (2023·凉山州中考)若一组数据 x_1,x_2,x_3,…,x_n 的方差为 2,则数据 x_1+3,x_2+3,x_3+3,…,x_n+3 的方差是　　(　A　)

A. 2　B. 5　C. 6　D. 11

7. (2023·温州中考)某校学生“亚运知识”竞赛成绩的频数分布直方图(每一组含前一个边界值,不含后一个边界值)如图 2-28-6所示,其中成绩在 80 分及以上的学生有__140__人。

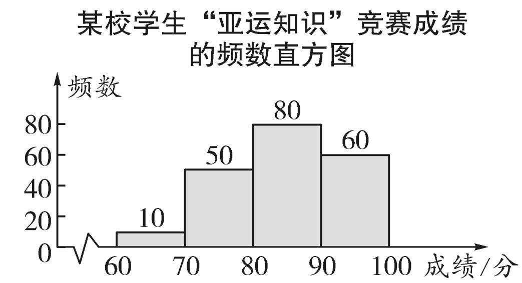


图 2-28-6

8. (2023·郴州中考)为积极响应“助力旅发大会,唱响美丽郴州”的号召,某校在各年级开展合唱比赛,规定每支参赛队伍的最终成绩按歌曲内容占 30%,演唱技巧占 50%,精神面貌占 20% 考评。某参赛队歌曲内容获得 90 分,演唱技巧获得 94 分,精神面貌获得 95 分,则该参赛队的最终成绩是__93__分。

9. (2023·武汉中考)某校为了解学生参加家务劳动的情况,随机抽取了部分学生在某个休息日做家务的劳动时间 t(单位:h)作为样本,将收集的数据整理后分为 A,B,C,D,E 五个组别,其中 A 组的数据分别为:0.5,0.4,0.4,0.4,0.3,绘制成如下不完整的

统计图表。

各组劳动时间的频数分布表

组别	时间 t/h	频数
A	$0<t\leqslant 0.5$	5
B	$0.5<t\leqslant 1$	a
C	$1<t\leqslant 1.5$	20
D	$1.5<t\leqslant 2$	15
E	$t>2$	8

各组劳动时间的扇形统计图

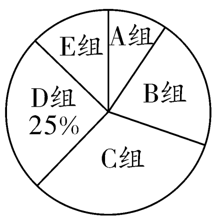


图 2-28-7

请根据以上信息解答下列问题。

(1) A 组数据的众数是__0.4__h；

(2) 本次调查的样本容量是__60__，B 组所在扇形的圆心角的大小是__72°__；

(3) 若该校有 1 200 名学生，估计该校学生劳动时间超过 1 h 的人数。

解：(2) 本次调查的样本容量是 $15\div 25\%=60$，

$\therefore a=60-5-20-15-8=12$，

$\therefore$ B 组所在扇形的圆心角的大小是 $360°\times\dfrac{12}{60}=72°$。

故答案为 60，72°。

(3) $1\ 200\times\dfrac{20+15+8}{60}=860$（人）。

答：该校学生劳动时间超过 1 h 的大约有 860 人。

10. (2023·河南中考) 蓬勃发展的快递业，为全国各地的新鲜水果及时走进千家万户提供了极大便利。不同的快递公司在配送、服务、收费和投递范围等方面各具优势。樱桃种植户小丽经过初步了解，打算从甲、乙两家快递公司中选择一家合作，为此，小丽收集了 10 家樱桃种植户对两家公司的相关评价，并整理、描述、分析如下：

a. 配送速度得分（满分 10 分）：

甲：6 6 7 7 7 8 9 9 9 10

乙：6 7 7 8 8 8 8 9 9 10

b. 服务质量得分统计图（满分 10 分）：

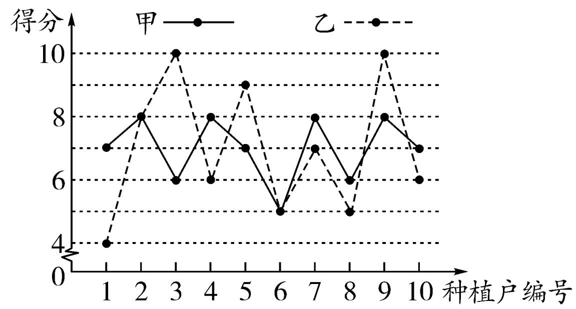


图 2-28-8

c. 配送速度和服务质量得分统计表：

快递公司	配送速度得分		服务质量得分	
	平均数	中位数	平均数	方差
甲	7.8	m	7	$s_{甲}^2$
乙	8	8	7	$s_{乙}^2$

根据以上信息，回答下列问题：

(1) 表格中的 $m=$__7.5__；$s_{甲}^2$__<__$s_{乙}^2$；（填“>”“=”或“<”）

(2) 综合上表中的统计量，你认为小丽应选择哪家公司？请说明理由；

(3) 为了从甲、乙两家公司中选出更合适的公司，你认为还应收集什么信息？（列出一条即可）

解：(1) 甲公司配送速度得分从小到大排列为 6，6，7，7，7，8，9，9，9，10，

共 10 个数据，其中第 5 个与第 6 个数据分别为 7，8，

$\therefore$ 中位数 $m=\frac{7+8}{2}=7.5$。

$s_{甲}^2=\frac{1}{10}\times[3\times(7-7)^2+4\times(8-7)^2+2\times(6-7)^2+(5-7)^2]=1$，

$s_{乙}^2=\frac{1}{10}\times[(4-7)^2+(8-7)^2+2\times(10-7)^2+2\times(6-7)^2+(9-7)^2+2\times(5-7)^2+(7-7)^2]=4.2$，

$\therefore s_{甲}^2<s_{乙}^2$。

故答案为 7.5，<。

(2)小丽应选择甲公司(答案不唯一)，理由如下：

$\because$ 配送速度得分甲和乙的得分相差不大，服务质量得分甲和乙的平均数相同，但是甲的方差明显小于乙的方差，

$\therefore$ 甲更稳定，

$\therefore$ 小丽应选择甲公司。

(3)还应收集甲、乙两家公司的收费情况。(答案不唯一，言之有理即可)

第 29 讲　概率

重难点突破

重点 1　随机事件与概率

1. 数字类求概率的问题，可以用概率公式求解，即 $P(A)=\frac{m}{n}$，其中 n 为所有事件发生的总次数，m 为事件 A 发生的总次数。

2. 与几何图形有关的概率问题实质是求长度比、面积比、体积比等。计算方法：$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{对应图形的长度(面积或体积等)}}{\text{总长度(面积或体积等)}}$。

3. 与代数、几何知识相结合的概率题其本质还是求概率，只不过需要应用代数和几何的方法确定某些限制条件的事件数。一般方法是利用列表或树状图求出所有等可能的情形，再求出满足条件的情形，进一步求概率。

重点 2　统计与概率结合

1. 大量重复试验时，事件发生的频率在某个特定数值的附近，并且摆动的幅度越来越小，根据频率的稳定性，可以用频率的集中趋势来估计概率，这个特定的数值就可以近似地作为这个事件的概率。

2. 用频率估计概率适用的情况：当试验的所有可能结果不是有限个或结果个数很多，或各种可能结果发生的可能性不相等时，一般通过频率来估计概率。

重点 3　游戏公平性

1. 判断游戏公平性的原则：游戏双方获胜的概率如果相等，说明游戏公平，否则说明游戏不公平。

2. 游戏规则的修改：对于任何一个游

戏，规则的修改不是唯一的，最基本的应是通过计算，使双方获胜的概率值朝着相等的方向修改。

易混淆点 放回与不放回试验的区别

放回试验（比如摸球试验）就是摸一次球后，把摸出的球再放回去，搅拌均匀后再摸下一次；不放回试验（比如摸球试验）是指摸一次球后，摸出的球不再放回，从剩余的球里面摸下一次。

温馨提示 不放回的第一次试验会影响第二次的抽取结果，也就是说第一次出现的结果不能在第二次试验中出现，所以在用列表法或画树状图法求概率时要剔除不存在的结果。

经典试题解析

知识点1 事件的分类

例1 （2023·营口中考）下列事件是必然事件的是（　　）

A. 四边形内角和是360°

B. 校园排球比赛，九（1）班获得冠军

C. 掷一枚硬币时，正面朝上

D. 打开电视，正在播放神舟十六号载人飞船发射实况

思路分析 根据随机事件、必然事件和不可能事件的定义，逐一判断即可解答。

解答 A. 四边形内角和是360°，是必然事件，故A符合题意；

B. 校园排球比赛，九（1）班获得冠军，是随机事件，故B不符合题意；

C. 掷一枚硬币时，正面朝上，是随机事件，故C不符合题意；

D. 打开电视，正在播放神舟十六号载人飞船发射实况，是随机事件，故D不符合题意。

故选A。

知识点2 利用频率估计概率

例2 （2023·恩施州中考）县林业部门考察银杏树苗在一定条件下移植的成活率，所统计的银杏树苗移植成活的相关数据如下表所示：

移植的棵数 a	100	300	600	1 000	7 000	15 000
成活的棵数 b	84	279	505	847	6 337	13 581
成活的频率 $\frac{b}{a}$	0.84	0.93	0.842	0.847	0.905	0.905

根据表中的信息，估计银杏树苗在一定条件下移植成活的概率为（精确到0.1）（　　）

A. 0.905　B. 0.90　C. 0.9　D. 0.8

思路分析 根据大量重复试验中事件发生的频率可以估计概率解答即可。

解答 由表格数据可得，随着样本数量的不断增加，银杏树苗移植成活的频率稳定在0.9附近，故估计银杏树苗在一定条件下移植成活的概率为0.9。

故选C。

知识点3 概率的应用

例3 （2023·云南中考）甲、乙两名同学准备参加种植蔬菜的劳动实践活动，各自随机选择种植辣椒、种植茄子、种植西红柿

三种中的一种，记种植辣椒为 A，种植茄子为 B，种植西红柿为 C。假设这两名同学选择种植哪种蔬菜不受任何因素影响，且每一种被选到的可能性相等。记甲同学的选择为 x，乙同学的选择为 y。

（1）请用列表法或画树状图法中的一种方法，求 (x,y) 所有可能出现的结果总数；

（2）求甲、乙两名同学选择种植同一种蔬菜的概率 P。

思路分析 （1）根据题意画出树状图，再由树状图求得所有等可能的结果即可；

（2）由（1）可知，共有 9 种等可能的结果，其中甲、乙两名同学选择种植同一种蔬菜的结果有 3 种，再由概率公式求解即可。

解 （1）画树状图如图 2-29-1：

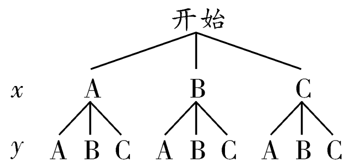


图 2-29-1

共有 9 种等可能的结果，分别为 (A,A)，(A,B)，(A,C)，(B,A)，(B,B)，(B,C)，(C,A)，(C,B)，(C,C)。

（2）由（1）可知，共有 9 种等可能的结果，其中甲、乙两名同学选择种植同一种蔬菜的结果有 3 种，

∴ 甲、乙两名同学选择种植同一种蔬菜的概率 $P=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$。

陕西中考链接

1. （2023 · 陕西中考）一个不透明的袋子中装有四个小球，这四个小球上各标有一个数字，分别是 1，1，2，3。这些小球除标有的数字外都相同。

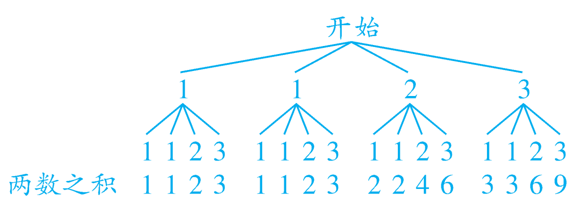
（1）从袋中随机摸出一个小球，则摸出的这个小球上标有的数字是 1 的概率为 $\underline{\frac{1}{2}}$；

（2）先从袋中随机摸出一个小球，记下小球上标有的数字后，放回，摇匀，再从袋中随机摸出一个小球，记下小球上标有的数字，请利用画树状图或列表的方法，求摸出的这两个小球上标有的数字之积是偶数的概率。

解：（1）由题意可得，从袋中随机摸出一个小球，则摸出的这个小球上标有的数字是 1 的概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。

故答案为 $\frac{1}{2}$。

（2）画树状图如图：



由树状图可得，共有 16 种等可能的结果，其中两数之积是偶数的结果有 7 种，

∴ 摸出的这两个小球上标有的数字之积是偶数的概率为 $\frac{7}{16}$。

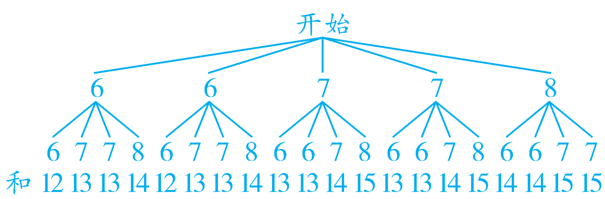
2. （2022 · 陕西中考）有五个封装后外

观完全相同的纸箱，且每个纸箱内各装有一个西瓜，其中，所装西瓜的质量分别为 6 kg，6 kg，7 kg，7 kg，8 kg。现将这五个纸箱随机摆放。

（1）若从这五个纸箱中随机选 1 个，则所选纸箱里西瓜的质量为 6 kg 的概率是 $\underline{\frac{2}{5}}$；

（2）若从这五个纸箱中随机选 2 个，请利用列表或画树状图的方法，求所选两个纸箱里西瓜的质量之和为 15 kg 的概率。

解：（2）画树状图如图：



由树状图可知，共有 20 种等可能的结果，其中所选两个纸箱里西瓜的质量之和为 15 kg 的结果有 4 种，

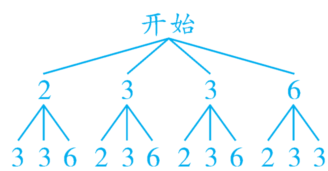
∴ 所选两个纸箱里西瓜的质量之和为 15 kg 的概率为 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$。

3. (2021 · 陕西中考) 从一副普通的扑克牌中取出四张牌，它们的牌面数字分别为 2，3，3，6。

（1）将这四张扑克牌背面朝上，洗匀。从中随机抽取一张，则抽取的这张牌的牌面数字是 3 的概率为 $\underline{\frac{1}{2}}$；

（2）将这四张扑克牌背面朝上，洗匀。从中随机抽取一张，不放回，再从剩余的三张牌中随机抽取一张。请利用画树状图或列表的方法，求抽取的这两张牌的牌面数字恰好相同的概率。

解：（2）画树状图如图：



由树状图可知，共有 12 种等可能的结果，抽取的这两张牌的牌面数字恰好相同的结果有 2 种，

∴ 抽取的这两张牌的牌面数字恰好相同的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$。

核心素养培优

1. (2023 · 徐州中考) 下列事件中的必然事件是 (A)

A. 地球绕着太阳转

B. 射击运动员射击一次，命中靶心

C. 天空出现三个太阳

D. 经过有交通信号灯的路口，遇到红灯

2. (2023 · 东营中考) 剪纸是中国最古老的民间艺术之一，先后入选中国国家级非物质文化遗产名录和人类非物质文化遗产代表作名录。小文购买了以“剪纸图案”为主题的 5 张书签，他想送给好朋友小乐一张。小文将书签背面朝上（背面完全相同），让小乐从中随机抽取一张，则小乐抽到的书签图案既是轴对称图形又是中心对称图形的概

率是 (D)

图 2-29-2

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

3. (2023 · 广东中考)某学校开设了劳动教育课程。小明从感兴趣的“种植”“烹饪”“陶艺”“木工”4 门课程中随机选择一门学习,每门课程被选中的可能性相等。小明恰好选中“烹饪”的概率为 (C)

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

4. (2023 · 绍兴中考)在一个不透明的袋子里装有 2 个红球和 5 个白球,它们除颜色外都相同,从中任意摸出 1 个球,则摸出的球为红球的概率是 (C)

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{7}$ D. $\frac{5}{7}$

5. (2023 · 连云港中考)图 2-29-3 是由 16 个相同的小正方形和 4 个相同的大正方形组成的图形,在这个图形内任取一点 P,则点 P 落在阴影部分的概率为 (B)

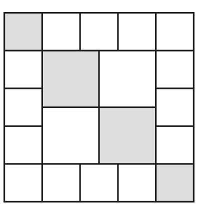


图 2-29-3

A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{13}{50}$ C. $\frac{13}{32}$ D. $\frac{5}{16}$

6. (2023 · 扬州中考)某种绿豆在相同条件下发芽试验的结果如下:

每批粒数 n	发芽的频数 m	发芽的频率 $\frac{m}{n}$ (精确到 0. 001)
2	2	1. 000
5	4	0. 800
10	9	0. 900
50	44	0. 880
100	92	0. 920
500	463	0. 926
1 000	928	0. 928
1 500	1 396	0. 931
2 000	1 866	0. 933
3 000	2 794	0. 931

这种绿豆发芽的概率的估计值为 __0. 93__。(精确到 0. 01)

7. (2023 · 大庆中考)新高考“3 + 1 + 2”选科模式是指,除语文、数学、外语 3 门科目以外,学生应在历史和物理 2 门首选科目中选择 1 科,在思想政治、地理、化学、生物学 4 门再选科目中选择 2 科。某同学从 4 门再选科目中随机选择 2 科,恰好选择地理和化学的概率为 __$\frac{1}{6}$__。

8. (2023 · 牡丹江中考)甲、乙两名同学玩“石头、剪子、布”的游戏,随机出手一次,甲获胜的概率是 __$\frac{1}{3}$__。

9. (2023 · 杭州中考)一个仅装有球的不透明布袋里只有 6 个红球和 n 个白球(仅有颜色不同)。若从中任意摸出一个球是红球的概率为 $\frac{2}{5}$,则 $n =$ __9__。

10.(2023 · 吉林中考)2023 年 6 月 4 日,神舟十五号载人飞船返回舱成功着陆。某校为弘扬爱国主义精神,举办以航天员事迹为主题的演讲比赛,主题人物由抽卡片决定,现有三张不透明的卡片,卡片正面分别写着费俊龙、邓清明、张陆三位航天员的姓名,依次记作 A,B,C,卡片除正面姓名不同外,其余均相同。三张卡片正面向下洗匀后,甲选手从中随机抽取一张卡片,记录航天员姓名后正面向下放回,洗匀后乙选手再从中随机抽取一张卡片,请用画树状图或列表的方法,求甲、乙两位选手演讲的主题人物是同一位航天员的概率。

解:根据题意列表如下:

乙＼甲	A	B	C
A	AA	AB	AC
B	BA	BB	BC
C	CA	CB	CC

由列表可知,共有 9 种等可能的结果,其中甲、乙两位选手演讲的主题人物是同一位航天员有 3 种,

∴ 甲、乙两位选手演讲的主题人物是同一位航天员的概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$。

第三部分 方法培优

第1讲 化归与模型思想

将欲求解的复杂问题经过一次或多次转化，将其化为一个或几个已知的或容易求解的问题，或将抽象的问题化为具体的问题，进而达到解决问题的目的，在这个过程中所运用的转化方法就是化归思想。

化归思想方法是解决问题的重要方法。如：三元方程（组）化为二元方程（组）、二元方程（组）化为一元方程来解答；在四边形的学习中，常将四边形的问题转化为三角形的问题来解答；直角三角形借数量关系来解答；几何问题借坐标来精确研究：一次函数、反比例函数、二次函数借点在坐标系里的规律来研究它们的图像性质等。

数学模型通常是指从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，如："垂线段最短""将军饮马""点圆最值"等，若注意将相关问题转化为对应的模型进行求解，常可化难为易，化繁为简，达到简洁求解之目的。

化归与模型思想常见的类型：

（1）将不规则图形的面积化为可求的规则图形的面积；

（2）将非格点图形问题化为格点图形问题；

（3）将函数问题化为求点坐标的问题；

（4）将几何问题化为基本的几何模型的问题。

经典试题解析

类型1 不规则图形的面积转化

例1 （2023·广元中考）如图3-1-1，半径为5的扇形AOB中，$\angle AOB=90°$，C是$\overset{\frown}{AB}$上一点，$CD\perp OA$，$CE\perp OB$，垂足分别为D，E。若$CD=CE$，则图中阴影部分的面积为（　　）

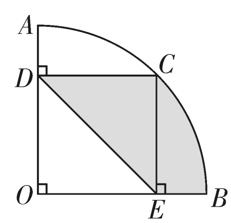


图3-1-1

A. $\frac{25}{16}\pi$　　B. $\frac{25}{8}\pi$

C. $\frac{25}{6}\pi$　　D. $\frac{25}{4}\pi$

思路分析 连接 OC，易证四边形 $CDOE$ 是正方形，进而得出 $S_{\triangle CDE}=S_{\triangle OCE}$，$\angle COE=45°$，把求阴影部分面积转化为求扇形面积即可解答。

解答 如图 3-1-2，连接 OC。

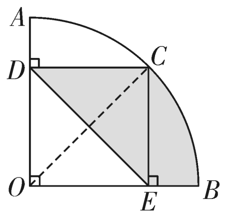


图 3-1-2

$\because CD\perp OA, CE\perp OB, \angle AOB=90°$，

$\therefore$ 四边形 $CDOE$ 是矩形。

$\because CD=CE$，

$\therefore$ 矩形 $CDOE$ 是正方形，

$\therefore S_{\triangle CDE}=S_{\triangle OCE}$，$\angle COE=45°$，

$\therefore$ 图中阴影部分面积 $=\dfrac{45\times\pi\times5^2}{360}=\dfrac{25}{8}\pi$。

故选 B。

类型 2　非格点图形问题的转化

例 2　（2023·济宁中考）如图 3-1-3，在正方形方格中，每个小正方形的边长都是 1 个单位长度，点 A,B,C,D,E 均在小正方形方格的顶点上，线段 AB,CD 交于点 F。若 $\angle CFB=\alpha$，则 $\angle ABE$ 等于（　　）

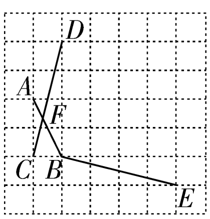


图 3-1-3

A. $180°-\alpha$　　B. $180°-2\alpha$

C. $90°+\alpha$　　D. $90°+2\alpha$

思路分析 在正方形方格中构造三角形，利用三角形全等的性质和外角的性质即可求解。

解答 如图 3-1-4，连接 BD,CB，过点 E 作 $EH\perp CH$，交 CB 的延长线于点 H。

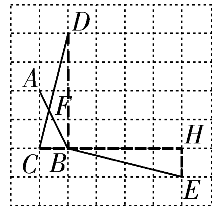


图 3-1-4

由图可知，$CB=EH=1$，$DB=BH=4$，$\angle DBC=\angle BHE=90°$，

$\therefore \triangle DBC\cong\triangle BHE$（SAS），

$\therefore \angle CDB=\angle EBH$。

$\because \angle CFB=\angle CDB+\angle FBD=\alpha$，

$\therefore \angle EBH+\angle FBD=\alpha$，

$\therefore \angle ABE=\angle FBD+\angle DBH+\angle EBH=\angle DBH+\alpha$。

$\because \angle DBH=90°$，

$\therefore \angle ABE=90°+\alpha$。

故选 C。

类型 3　函数问题的转化

例 3　（2023·达州中考）如图 3-1-5，一次函数 $y=2x$ 与反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图像相交于 A,B 两点，以 AB 为边作等边三角形 ABC。若反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像过点 C，则 k 的值为________。

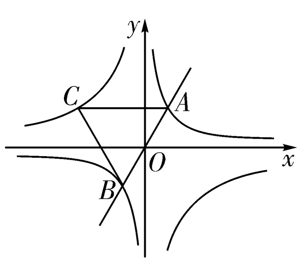


图 3-1-5

思路分析 依据题意，点 C 在 AB 的垂直平分线上，可得直线 OC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x$，故可设 $C\left(a,-\frac{1}{2}a\right)$，再由 $AC=AB$ 求出 a 的值，代入 $y=\frac{k}{x}$ 即可求解。

解答 如图 3-1-6，连接 OC。

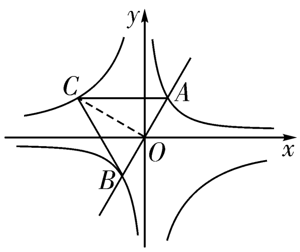


图 3-1-6

根据题意，建立方程组 $\begin{cases} y=2x, \\ y=\frac{2}{x}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-2。\end{cases}$

$\therefore A(1,2),B(-1,-2)$，

$\therefore$ 点 A,B 关于原点对称。

$\because$ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore$ AB 的垂直平分线 OC 过原点 O 和点 C。

$\because$ 直线 AB 的解析式为 $y=2x$，

$\therefore$ 直线 OC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x$，

$\therefore$ 设 $C\left(a,-\frac{1}{2}a\right)$。

又$\because$ $\triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore AC=AB$，

$\therefore$ 根据两点间的距离公式可得 $\sqrt{(a-1)^2+\left(-\frac{1}{2}a-2\right)^2}=\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}$，

解得 $a=\pm 2\sqrt{3}$。

$\because$ 点 C 在第二象限，

$\therefore C(-2\sqrt{3},\sqrt{3})$，

将点 C 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=-6$。

故答案为 -6。

类型 4　几何问题的转化

例 4　（2023 · 菏泽中考）如图 3-1-7，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle BAD=90°$，$AB=5$，$AD=4$，$AD<BC$，点 E 在线段 BC 上运动，点 F 在线段 AE 上，$\angle ADF=\angle BAE$，则线段 BF 的最小值为 ________。

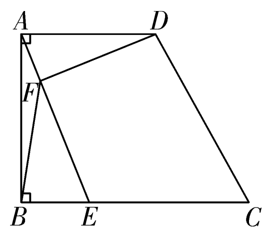


图 3-1-7

思路分析 已知 $\angle ADF=\angle BAE$，证明 $\angle AFD=90°$，即点 F 在以点 O 为圆心，AD 长为直径的半圆 O 上运动，求 BF 的最小值转化成求圆外一点到圆上一点的最小值问题（即点圆最值模型），当 B,F,O 三点共线时，BF 最小，最小值为 $OB-OF$。

解答 如图 3-1-8，设 AD 的中点为 O，以点 O 为圆心，AD 长为直径画半圆，连接 OF,OB。

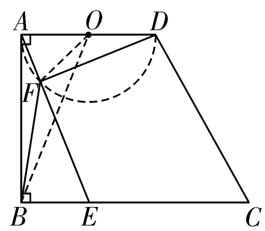


图 3-1-8

$\because$ $\angle ABC=\angle BAD=90°$，

$\therefore AD /\!/ BC$，

$\therefore \angle DAE=\angle AEB$。

$\because$ $\angle ADF=\angle BAE$，

$\therefore \angle AFD=\angle ABE=90°$，

$\therefore$ 点 F 在以点 O 为圆心，AD 长为直径的半圆 O 上运动。

$\because AD=4$，

$\therefore AO=OF=2$。

在 $Rt\triangle BAO$ 中，$AB=5$，$AO=2$，

$\therefore BO=\sqrt{AB^2+AO^2}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$，

又 $BF\geqslant OB-OF=\sqrt{29}-2$，

$\therefore$ 当 B，F，O 三点共线时，BF 最小。

$\therefore$ 线段 BF 的最小值为 $\sqrt{29}-2$。

故答案为 $\sqrt{29}-2$。

核心素养培优

1. (2023·连云港中考)如图3-1-9，矩形 $ABCD$ 内接于⊙O，分别以 AB，BC，CD，AD 为直径向外作半圆。若 $AB=4$，$BC=5$，则阴影部分的面积是 (D)

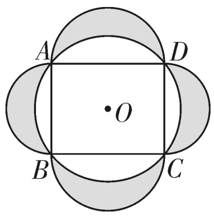


图 3-1-9

A. $\frac{41}{4}\pi-20$　　B. $\frac{41}{2}\pi-20$

C. 20π　　D. 20

2. (2023·苏州中考)如图3-1-10，在正方形网格内，线段 PQ 的两个端点都在格点上，网格内另有 A，B，C，D 四个格点，下面四个结论中，正确的是 (B)

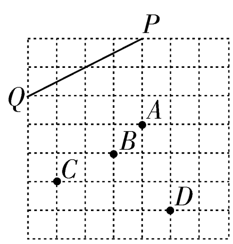


图 3-1-10

A. 连接 AB，则 $AB/\!/PQ$

B. 连接 BC，则 $BC/\!/PQ$

C. 连接 BD，则 $BD\perp PQ$

D. 连接 AD，则 $AD\perp PQ$

3. (2022·宿迁中考)如图3-1-11，点 A 在反比例函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 的图像上，以 OA 为一边作等腰直角三角形 OAB，其中 $\angle OAB=90°$，$AO=AB$，则线段 OB 的长的最小值是 (C)

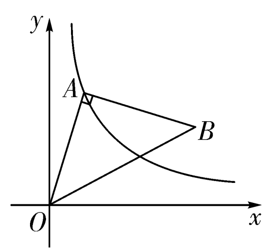


图 3-1-11

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

4. (2023·广西中考)如图3-1-12，在边长为2的正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，CD 上的动点，M，N 分别是 EF，AF 的中点，则 MN 的最大值为 $\underline{\sqrt{2}}$。

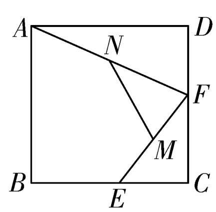


图 3-1-12

5. (2023·枣庄中考)银杏是著名的活化石植物,其叶有细长的叶柄,呈扇形。图3-1-13是一片银杏叶标本,叶片上两点B,C的坐标分别为$(-3,2)$,$(4,3)$,将银杏叶绕原点顺时针旋转$90°$后,叶柄上点A的对应点的坐标为__$(-3,1)$__。

图 3-1-13

第 2 讲　数形结合思想

数形结合思想是数学教学内容的主线之一。如:用画线段图、框架图、列表法来分析问题;借数轴表示数、确定不等式组的解集;借助图像研究函数的性质,即图像的几何特征与数量特征;利用图像解释二元一次方程组的解与两直线交点坐标的关系;处理不等式时,联系相关函数,分析其几何意义,从图形上求解或寻找解题思路;利用图形解释、说明公式、法则的由来与合理性;借勾股定理、锐角三角函数解三角形相关问题;用相似比精准描述图形的大小关系;圆中的点、线与圆的位置,借数量关系精准定义;借直角坐标系研究图形的变换问题;二次函数与几何的综合问题等。

"数"和"形"是从两个方面反映事物的特点,它主要是指数与形之间的一一对应关系,即把抽象的数学语言、数量关系与直观的几何图形、位置关系结合起来,通过"以形助数"或"以数解形",把抽象思维与形象思维结合起来,使复杂问题简单化、抽象问题具体化,从而起到简化解题过程的目的。

经典试题解析

类型 1　以数解形

例 1　(2023·安徽中考)已知反比例函数$y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$在第一象限内的图像与一次函数$y=-x+b$的图像如图3-2-1所示,则函数$y=x^2-bx+k-1$的图像可能是　(　　)

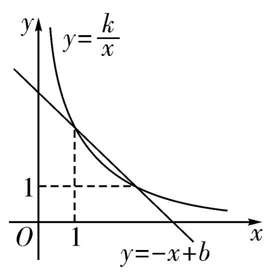
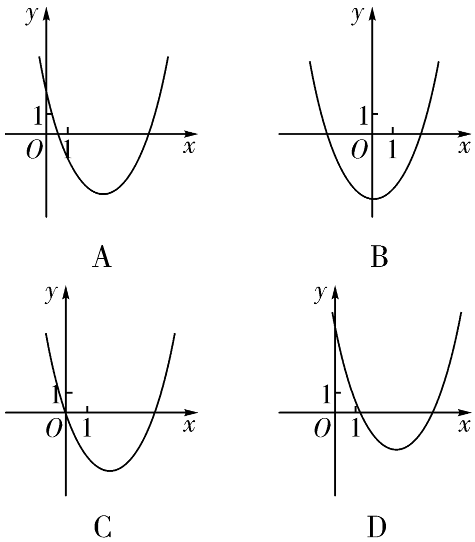


图 3-2-1



思路分析 设 $A(1,k)$，则 $B(k,1)$，由图像可知 $k>1$，将点 $B(k,1)$ 代入 $y=-x+b$，得出 $k=b-1$，代入二次函数 $y=x^2-bx+k-1$，可得出抛物线的对称轴在直线 $x=1$ 的右侧，过定点 $(1,-1)$，且与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴。

解答 如图 3-2-2，设 $A(1,k)$，则 $B(k,1)$，根据图像可得 $k>1$，

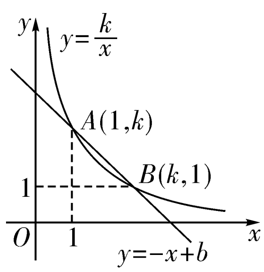


图 3-2-2

将 $B(k,1)$ 代入 $y=-x+b$，

$\therefore 1=-k+b$，$\therefore k=b-1$。

又 $k>1$，$\therefore b>2$，

$\therefore$ 二次函数 $y=x^2-bx+b-2$ 的对称轴为直线 $x=\frac{b}{2}>1$。

当 $x=1$ 时，$y=1-b+b-2=-1$，

$\therefore$ 二次函数的图像经过点 $(1,-1)$。

当 $x=0$ 时，$y=k-1=b-2>0$。

综上可知，二次函数图像的对称轴在直线 $x=1$ 的右侧，过定点 $(1,-1)$，且与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴。

故选 A。

类型 2 以形助数

例 2 （2023·烟台中考）如图 3-2-3，将一个量角器与一把无刻度直尺水平摆放，直尺的长边与量角器的外弧分别交于点 A,B,C,D，连接 AB，则 $\angle BAD$ 的度数为 ________。

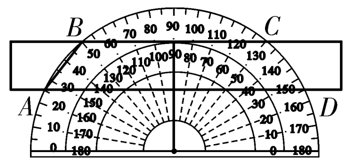


图 3-2-3

思路分析 观察图形可以看出 $\angle BAD$ 为圆周角，根据圆周角定理求出 $\overset{\frown}{BD}$ 所对的圆心角的度数即可求解。

解答 如图 3-2-4，设量角器的圆心为 O，连接 OD,OB，

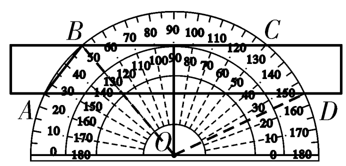


图 3-2-4

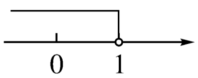
$\because \angle BOD=130°-25°=105°$，

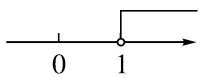
$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=52.5°$。

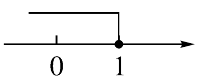
故答案为 52.5°。

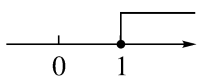
核心素养培优

1.(2023 · 内江中考)函数 $y=\sqrt{x-1}$ 中,自变量 x 的取值范围在数轴上表示为 (D)

A. 

B. 

C. 

D. 

2.(2023 · 乐山中考)我国汉代数学家赵爽在注解《周髀算经》时给出“赵爽弦图”(如图 3-2-5),它是由四个全等的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正方形。如果大正方形的面积为 25,小正方形的面积为 1,那么 $\sin\theta=$ (A)

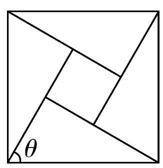


图 3-2-5

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. 4　　D. $\frac{1}{5}$

3.(2023 · 福建中考)如图 3-2-6,正方形的四个顶点分别位于两个反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 和 $y=\frac{n}{x}$ 的图像的四个分支上,则实数 n 的值为 (A)

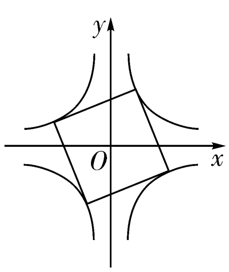


图 3-2-6

A. -3　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

4.(2023 · 眉山中考)如图 3-2-7,二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像与 x 轴的一个交点坐标为 $(1,0)$,对称轴为直线 $x=-1$,下列四个结论:① $abc<0$;② $4a-2b+c<0$;③ $3a+c=0$;④当 $-3<x<1$ 时,$ax^2+bx+c<0$。其中正确结论的个数为 (D)

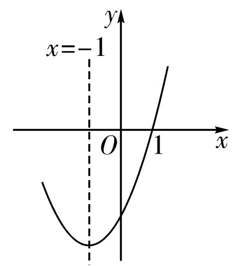


图 3-2-7

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5.(2023 · 通辽中考)如图 3-2-8,在平面直角坐标系中,已知点 $P(0,1)$,点 $A(4,1)$,以点 P 为旋转中心,把点 A 按逆时针方向旋转 60° 得到点 B。在 $M_1(-1,-\sqrt{3})$,$M_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$,$M_3(1,\sqrt{3}-1)$,$M_4(2,2\sqrt{3})$ 四个点中,直线 PB 经过的点是 (B)

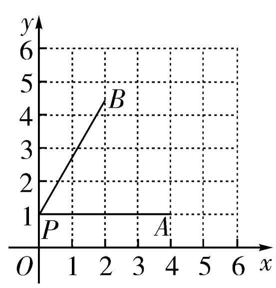


图 3-2-8

A. M_1　　B. M_2　　C. M_3　　D. M_4

6. (2023·扬州中考)如图3-2-9,已知正方形$ABCD$的边长为1,点E,F分别在边AD,BC上,将正方形沿着EF翻折,点B恰好落在CD边上的点B'处。如果四边形$ABFE$与四边形$EFCD$的面积比为3∶5,那么线段FC的长为__$\frac{3}{8}$__。

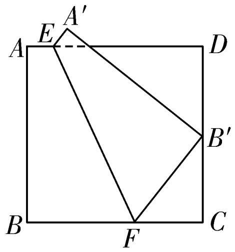


图3-2-9

7. (2023·河南中考)如图3-2-10①,点P从等边三角形ABC的顶点A出发,沿直线运动到三角形内部一点,再从该点沿直线运动到顶点B。设点P运动的路程为x,$\frac{PB}{PC}=y$,图3-2-10②是点P运动时y随x变化的关系图像,则等边三角形ABC的边长为__6__。

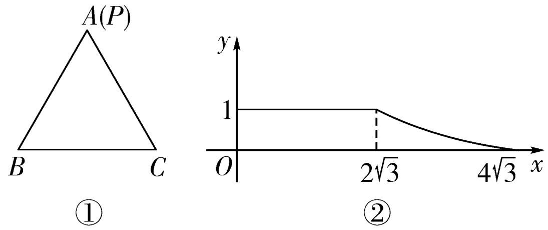


图3-2-10

第3讲　分类讨论思想

在解答某些数学问题时,可能会遇到多种可能情况,根据题目的特点和要求,对各种情况加以分类,并按类逐一研究解决方法可实现解决原问题的策略方法,称为分类讨论思想。

分类讨论应当遵循的基本原则是“不重不漏”,具体策略:(1)分类中每一个部分是相互独立的;(2)一次分类要统一个标准;(3)分类应逐级有序进行;(4)以公式、定理的使用条件为标准分类。

常见的题型:

(1)与腰、底不确定的等腰三角形相关的问题;

(2)与斜边、直角边不确定的直角三角形相关的问题;

(3)与定位作图相关的问题;

(4)与绝对值、函数的定义等相关的问题;

(5)因函数自变量取值范围的不同解法有异或两个函数的图像相交,解不等式的问题;

(6)与特殊几何图形顶点位置不确定相关的问题;

(7)在图形相似中,对应顶点或对应边不确定的问题。

经典试题解析

类型1 图形特殊点不同位置的问题

例1 (2022·龙东地区中考)在矩形 $ABCD$ 中,$AB=9$,$AD=12$,点 E 在边 CD 上,且 $CE=4$,点 P 是直线 BC 上的一个动点。若 $\triangle APE$ 是直角三角形,则 BP 的长为________。

思路分析 若 $\triangle APE$ 是直角三角形,有三种情况:①如图 3-3-1,$\angle AEP=90°$;②如图 3-3-2,$\angle PAE=90°$;③如图 3-3-3,$\angle APE=90°$,根据相似三角形的性质即可解答。

解答 若 $\triangle APE$ 是直角三角形,有以下三种情况:

①如图 3-3-1,当 $\angle AEP=90°$时,

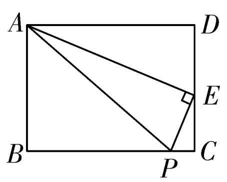


图 3-3-1

$\therefore \angle AED+\angle CEP=90°$。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle C=\angle D=90°$,

$\therefore \angle CEP+\angle CPE=90°$,

$\therefore \angle AED=\angle CPE$,

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ECP$,

$\therefore \frac{AD}{CE}=\frac{DE}{CP}$,即$\frac{12}{4}=\frac{9-4}{CP}$,

$\therefore CP=\frac{5}{3}$。

$\because BC=AD=12$,

$\therefore BP=12-\frac{5}{3}=\frac{31}{3}$;

②如图 3-3-2,当 $\angle PAE=90°$时,

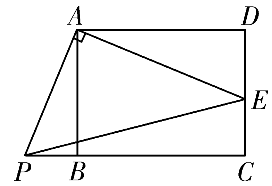


图 3-3-2

$\because \angle DAE+\angle BAE=\angle BAE+\angle BAP=90°$,

$\therefore \angle DAE=\angle BAP$。

$\because \angle D=\angle ABP=90°$,

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABP$,

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{PB}$,即$\frac{12}{9}=\frac{5}{BP}$,$\therefore BP=\frac{15}{4}$;

③如图 3-3-3,当 $\angle APE=90°$时,设 $BP=x$,则 $PC=12-x$,

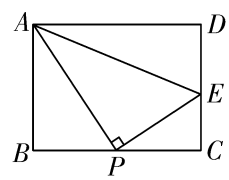


图 3-3-3

$\therefore \angle APB+\angle EPC=90°$。

$\because \angle B=\angle C=90°$,

$\therefore \angle EPC+\angle PEC=90°$,

$\therefore \angle PEC=\angle APB$,

$\therefore \triangle ABP \backsim \triangle PCE$,

$\therefore \frac{AB}{PC}=\frac{BP}{CE}$,即$\frac{9}{12-x}=\frac{x}{4}$,

$\therefore x_1=x_2=6$,$\therefore BP=6$。

综上,BP 的长为$\frac{31}{3}$或$\frac{15}{4}$或 6。

故答案为$\frac{31}{3}$或$\frac{15}{4}$或 6。

类型 2 图形位置不确定的相关问题

例 2 （2023·扬州中考节选）【问题情境】在综合实践活动课上，李老师让同桌两位同学用相同的两块含 30°角的三角板开展数学探究活动，两块三角板分别记作 $\triangle ADB$ 和 $\triangle A'D'C$，$\angle ADB=\angle A'D'C=90°$，$\angle B=\angle C=30°$，设 $AB=2$。

【操作探究】如图 3-3-4①，先将 $\triangle ADB$ 和 $\triangle A'D'C$ 的边 AD，$A'D'$ 重合，再将 $\triangle A'D'C$ 绕着点 A 按顺时针方向旋转，旋转角为 $\alpha(0°\leqslant\alpha\leqslant360°)$，旋转过程中 $\triangle ADB$ 保持不动，连接 BC。当 $\alpha=60°$ 时，$BC=$ ________；当 $BC=2\sqrt{2}$ 时，$\alpha=$ ________。

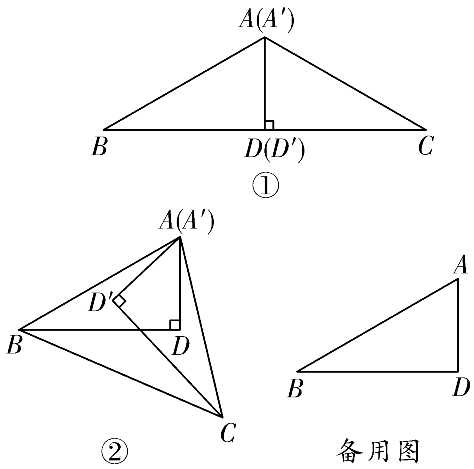


图 3-3-4

思路分析 当 $\alpha=60°$ 时，A，D'，B 共线，A'，D，C 共线，可得 $\triangle ABC$ 是等边三角形，故 $BC=AB=2$；当 $BC=2\sqrt{2}$ 时，过 A 作 $AH\perp BC$，垂足为 H，分两种情况画出图形，即可求解。

解答 如图 3-3-5，$\because\ \angle ADB=\angle A'D'C=90°$，$\angle ABD=\angle A'CD'=30°$，

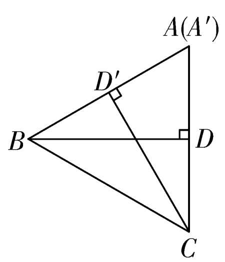


图 3-3-5

$\therefore\ \angle BAD=\angle D'A'C=60°$，

$\therefore$ 当 $\alpha=60°$ 时，A，D'，B 共线，A'，D，C 共线。

$\because\ AB=AC$，

$\therefore\ \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore\ BC=AB=2$。

当 $BC=2\sqrt{2}$ 时，如图 3-3-6，过 A 作 $AH\perp BC$，垂足为 H。

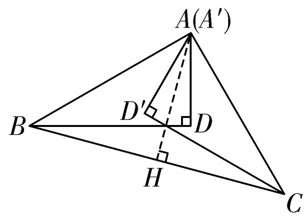


图 3-3-6

$\because\ AB=AC$，

$\therefore\ BH=CH=\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{2}$，

$\therefore\ \sin\angle BAH=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\ \angle BAH=45°$，

$\therefore\ \angle BAC=2\angle BAH=90°$，

$\therefore\ \alpha=120°-90°=30°$；

如图 3-3-7，同理可得 $\angle BAC=90°$，

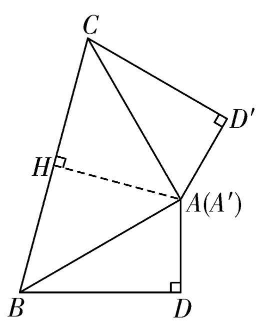


图 3-3-7

$\therefore\ \alpha=60°+90°+60°=210°$，

$\therefore$ 当 $BC=2\sqrt{2}$ 时，$\alpha=30°$ 或 210°。

故答案为 2，30°或 210°。

类型3　与绝对值、函数的定义及变量的取值范围等相关的问题

例3　(2023·苏州中考)某动力科学研究院实验基地内装有一段笔直的轨道 AB，长度为1 m的金属滑块在上面做往返滑动。如图3-3-8，滑块首先沿 AB 方向从左向右匀速滑动，滑动速度为9 m/s，滑动开始前滑块左端与点 A 重合，当滑块右端到达点 B 时，滑块停顿2 s，然后再以小于9 m/s的速度匀速返回，直到滑块的左端与点 A 重合，滑动停止。设时间为 t(s)时，滑块左端离点 A 的距离为 l_1(m)，右端离点 B 的距离为 l_2(m)，记 $d=l_1-l_2$，d 与 t 具有函数关系，已知滑块在从左向右滑动过程中，当 $t=4.5$ s和5.5 s时，与之对应的 d 的两个值互为相反数；滑块从点 A 出发到最后返回点 A，整个过程总用时27 s(含停顿时间)。请你根据所给条件解决下列问题：

(1)滑块从点 A 到点 B 的滑动过程中，d 的值____；(填“由负到正”或“由正到负”)

(2)滑块从点 B 到点 A 的滑动过程中，求 d 关于 t 的函数表达式；

(3)在整个往返过程中，若 $d=18$，求 t 的值。

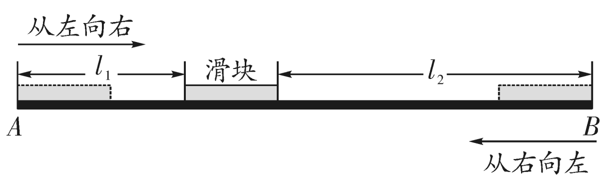


图3-3-8

思路分析　(1)根据等式 $d=l_1-l_2$，结合题意，即可求解；

(2)设轨道 AB 的长为 n，根据已知条件得出 $l_1+l_2+1=n$，则 $d=l_1-l_2=18t-n+1$。根据当 $t=4.5$ s和5.5 s时，与之对应的 d 的两个值互为相反数，则当 $t=5$ 时，$d=0$，得出 $n=91$，继而根据已知条件求得滑块返回的速度为 $(91-1)\div15=6$(m/s)，得出 $l_2=6(t-12)$，代入 $d=l_1-l_2$，即可求解；

(3)当 $d=18$ 时，分两种情况：①当 $0\leqslant t\leqslant10$ 时；②当 $12\leqslant t\leqslant27$ 时，分别令 $d=18$，进而即可求解。

解　(1)∵ $d=l_1-l_2$，

当滑块在 A 点时，$l_1=0$，$d=-l_2<0$，

当滑块在 B 点时，$l_2=0$，$d=l_1>0$，

∴ d 的值由负到正。

故答案为由负到正。

(2)设轨道 AB 的长为 n，当滑块从左向右滑动时，

∵ $l_1+l_2+1=n$，

∴ $l_2=n-l_1-1$，

∴ $d=l_1-l_2=l_1-(n-l_1-1)=2l_1-n+1=2\times9t-n+1=18t-n+1$，

∴ d 是 t 的一次函数。

∵ 当 $t=4.5$ s和5.5 s时，与之对应的 d 的两个值互为相反数，

∴ 当 $t=5$ 时，$d=0$，

∴ $18\times5-n+1=0$，

解得 $n=91$，

∴ 滑块从点 A 到点 B 所用的时间为 $(91-1)\div9=10$(s)。

∵ 整个过程总用时27 s(含停顿时间)，当滑块右端到达点 B 时，滑块停顿2 s，

∴ 滑块从 B 返回到 A 所用的时间为 $27-10-2=15$(s)，

∴ 滑块返回的速度为 $(91-1)\div15=6$(m/s)，

∴ 当 $12\leqslant t\leqslant27$ 时，$l_2=6(t-12)$，

∴ $l_1=91-1-l_2=90-6(t-12)=162$

$-6t$,

$\therefore d=l_1-l_2=162-6t-6(t-12)=-12t+234$,

$\therefore d$ 关于 t 的函数表达式为 $d=-12t+234$。

(3)当 $d=18$ 时,分以下两种情况:

①当 $0\leqslant t\leqslant 10$ 时,$18t-90=18$,

$\therefore t=6$;

②当 $12\leqslant t\leqslant 27$ 时,$-12t+234=18$,

$\therefore t=18$。

综上所述,当 $t=6$ 或 18 时,$d=18$。

核心素养培优

1. (2023·绍兴中考)如图3-3-9,在菱形 $ABCD$ 中,$\angle DAB=40°$,连接 AC,以点 A 为圆心,AC 长为半径作弧,交直线 AD 于点 E,连接 CE,则 $\angle AEC$ 的度数是__10°或 80°__。

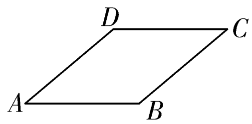


图 3-3-9

2. (2023·河南中考)在矩形 $ABCD$ 中,M 为对角线 BD 的中点,点 N 在边 AD 上,且 $AN=AB=1$。当以点 D,M,N 为顶点的三角形是直角三角形时,AD 的长为__2 或 $\sqrt{2}+1$__。

3. (2023·福建中考)已知抛物线 $y=ax^2-2ax+b(a>0)$ 经过 $A(2n+3,y_1)$,$B(n-1,y_2)$ 两点。若 A,B 分别位于抛物线对称轴的两侧,且 $y_1<y_2$,则 n 的取值范围是__$-1<n<0$__。

4. (2023·巴中中考)规定:如果两个函数的图像关于 y 轴对称,那么称这两个函数互为"Y 函数"。例如:函数 $y=x+3$ 与 $y=-x+3$ 互为"Y 函数"。若函数 $y=\frac{k}{4}x^2+(k-1)x+k-3$ 的图像与 x 轴只有一个交点,则它的"Y 函数"图像与 x 轴的交点坐标为__(3,0)或(4,0)__。

5. (2022·宁波中考)如图 3-3-10,在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,E 为 AB 边上一点,以 AE 为直径的半圆 O 与 BC 相切于点 D,连接 AD,$BE=3$,$BD=3\sqrt{5}$。P 是 AB 边上的动点,当△ADP 为等腰三角形时,AP 的长为__6 或 $2\sqrt{30}$__。

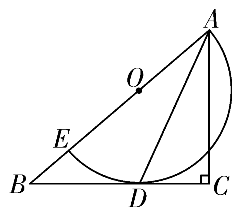


图 3-3-10

6. (2023·眉山中考)如图 3-3-11,在平面直角坐标系 xOy 中,点 B 的坐标为 $(-8,6)$,过点 B 分别作 x 轴、y 轴的垂线,垂足分别为点 C、点 A,直线 $y=-2x-6$ 与 AB 交于点 D,与 y 轴交于点 E,动点 M 在线段 BC 上,动点 N 在直线 $y=-2x-6$ 上。若△AMN 是以点 N 为直角顶点的等腰直角三角形,则点 M 的坐标为__$(-8,6)$或$\left(-8,\frac{2}{3}\right)$__。

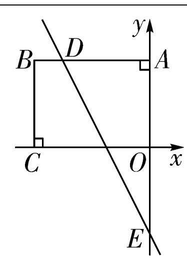


图 3-3-11

第 4 讲　方程与函数思想

函数思想是指用函数的观念、函数的概念、函数的思维去分析问题、转化问题和解决问题。函数是研究自然界中数量（自变量、因变量）之间的关系，对其数量关系通常建立一个函数关系（含列表法、图形法、解析法等），再根据学习函数知识获得的经验、方法、性质去完成对问题解答就是函数思想方法的应用。

方程思想是指在求解数学问题时，从题中的已知量和未知量的数量关系中找到等量关系，先将等量关系转化为方程（组），然后解方程（组）使问题得以解决。

方程与函数思想常综合在一起使用，主要从函数角度（如一次函数、二次函数）分析会发现：方程（组）、不等式（组）通常均可归为某类函数的一部分或特例。

常见的类型：

（1）运用方程与函数思想解决实际问题（含一元一次方程、不等式与一次函数类；二元一次方程组、不等式组与二次函数类）。

（2）运用方程与函数思想解几何问题（含利用相似三角形、解直角三角形等相关联的知识构建方程模型计算线段长度类；与一次函数或二次函数关联的最值问题）。

经典试题解析

类型 1　用方程与函数思想解实际问题

例 1　（2023·武汉中考）某课外科技活动小组研制了一种航模飞机。通过实验，收集了飞机相对于出发点的飞行水平距离 x（单位：m）与飞行高度 y（单位：m）随飞行时间 t（单位：s）变化的数据如下表。

飞行时间 t/s	0	2	4	6	8	…
飞行水平距离 x/m	0	10	20	30	40	…
飞行高度 y/m	0	22	40	54	64	…

探究发现：x 与 t，y 与 t 之间的数量关系可以用我们已学过的函数来描述。直接写出 x 关于 t 的函数解析式和 y 关于 t 的函数解析式（不要求写出自变量的取值范围）。

问题解决：如图 3-4-1，活动小组在水平安全线上 A 处设置一个高度可以变化的发射平台试飞该航模飞机。根据上面的探究发现解决下列问题。

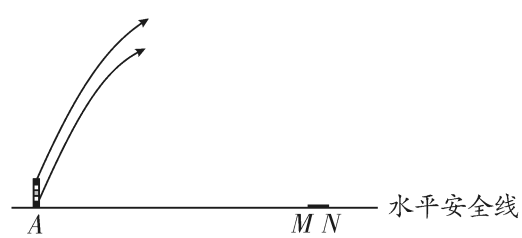


图 3-4-1

(1)若发射平台相对于安全线的高度为 0 m,求飞机落到安全线时飞行的水平距离;

(2)在安全线上设置回收区域 MN,$AM=125$ m,$MN=5$ m。若飞机落到 MN 内(不包括端点 M,N),求发射平台相对于安全线的高度的变化范围。

思路分析 探究发现:根据待定系数法求解即可;

问题解决:(1)令二次函数 $y=0$ 解得 t 的值代入一次函数解析式即可求解;

(2)设发射平台相对于安全线的高度为 n m,则飞机相对于安全线的飞行高度 $y'=-\frac{1}{2}t^2+12t+n$,再结合 $125<x<130$,即可求解。

解 探究发现:x 关于 t 是一次函数关系,y 关于 t 是二次函数关系,

设 $x=kt(k\neq0)$,

由题意得 $10=2k$,

解得 $k=5$,

$\therefore x$ 关于 t 的函数解析式为 $x=5t$。

设 $y=at^2+bt(a\neq0)$,

由题意,得 $\begin{cases}4a+2b=22,\\16a+4b=40,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=12,\end{cases}$

$\therefore y$ 关于 t 的函数解析式为 $y=-\frac{1}{2}t^2+12t$。

问题解决:(1)解:依题意,得 $-\frac{1}{2}t^2+12t=0$,

解得 $t_1=0$(舍),$t_2=24$,

当 $t=24$ 时,$x=5\times24=120$。

答:飞机落到安全线时飞行的水平距离为 120 m。

(2)解:设发射平台相对于安全线的高度为 n m,飞机相对于安全线的飞行高度 $y'=-\frac{1}{2}t^2+12t+n$。

$\because 125<x<130$,

$\therefore 125<5t<130$,

$\therefore 25<t<26$,

在 $y'=-\frac{1}{2}t^2+12t+n$ 中,

当 $t=25$,$y'=0$ 时,$n=12.5$;

当 $t=26$,$y'=0$ 时,$n=26$。

$\therefore 12.5<n<26$。

答:发射平台相对于安全线的高度的变化范围是大于 12.5 m 且小于 26 m。

类型 2 利用方程与函数思想解决几何问题

例 2 (2023·苏州中考)如图 3-4-2,$\angle BAC=90°$,$AB=AC=3\sqrt{2}$,过点 C 作 $CD\perp BC$,延长 CB 到 E,使 $BE=\frac{1}{3}CD$,连接 AE,ED。若 $ED=2AE$,则 $BE=$________。(结果保留根号)

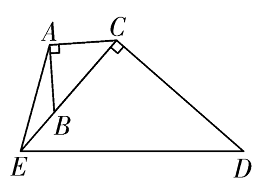


图 3-4-2

思路分析 过 A 作 $AF\perp BC$,垂足为点 F,设 $BE=x$,可得 $CD=3x$,求出 BF,FC,AF 的长度,用含 x 的式子表示出 EF,CE 的长度,再根据勾股定理和 $ED=2AE$ 列方程求解

即可。

解答　如图 3-4-3，过 A 作 $AF\perp BC$，垂足为点 F，设 $BE=x$，

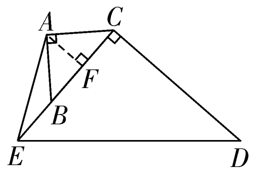


图 3-4-3

$\because BE=\frac{1}{3}CD$，

$\therefore CD=3x$。

$\because \angle BAC=90°, AB=AC=3\sqrt{2}$，

$\therefore BF=AF=FC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=3, CE=6+x, EF=3+x$。

在 Rt△AEF 中，$AE^2=AF^2+EF^2=3^2+(3+x)^2$。

$\because ED=2AE$，

$\therefore ED^2=4AE^2$。

在 Rt△CED 中，有 $ED^2=CE^2+CD^2$，

$\therefore 4[3^2+(3+x)^2]=(6+x)^2+(3x)^2$，

解得 $x=1\pm\sqrt{7}$，

经检验，$x=1-\sqrt{7}$不符合题意，

$\therefore BE=x=1+\sqrt{7}$。

故答案为 $1+\sqrt{7}$。

核心素养培优

1. (2023·丽水中考)古代中国的数学专著《九章算术》中有一题:“今有生丝三十斤，干之，耗三斤十二两。今有干丝一十二斤，问生丝几何?”意思是:“今有生丝 30 斤，干燥后，耗损了 3 斤 12 两(古代中国 1 斤等于 16 两)。现在有干丝 12 斤，问原来有生丝多少斤。”则原来生丝有 $\underline{\frac{96}{7}}$ 斤。

2. (2023·重庆中考)为了加快数字化城市建设，某市计划新建一批智能充电桩，第一个月新建了 301 个充电桩，第三个月新建了 500 个充电桩，设该市新建智能充电桩个数的月平均增长率为 x，根据题意，请列出方程：$\underline{301(1+x)^2=500}$。

3. 已知方程组$\begin{cases}2x+y=7,\\x=y-1\end{cases}$的解也是关于 x,y 的方程 $ax+y=4$ 的一个解，则 a 的值是 $\underline{\frac{1}{2}}$。

4. (2023·扬州中考)我国汉代数学家赵爽证明勾股定理时创制了一幅“勾股圆方图”，后人称之为“赵爽弦图”，它是由 4 个全等的直角三角形和一个小正方形组成。如图 3-4-4，直角三角形的直角边长为 a,b，斜边长为 c。若 $b-a=4, c=20$，则每个直角三角形的面积为 $\underline{96}$。

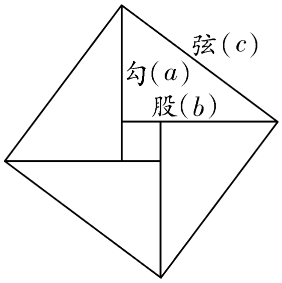


图 3-4-4

5. (2023·金华中考)如图 3-4-5，一次函

数 $y=ax+b$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像交于点 $A(2,3)$，$B(m,-2)$，则不等式 $ax+b>\frac{k}{x}$ 的解集是__$-3<x<0$ 或 $x>2$__。

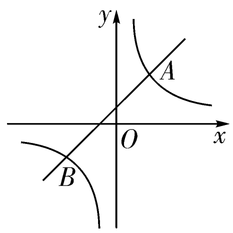


图 3-4-5

6.（2023·扬州中考）某气球内充满了一定质量的气体，在温度不变的条件下，气球内气体的压强 p(Pa) 是气球体积 $V(\mathrm{m}^3)$ 的反比例函数，且当 $V=3\ \mathrm{m}^3$ 时，$p=8\ 000$ Pa。当气球内的气体压强大于 40 000 Pa 时，气球将爆炸，为确保气球不爆炸，气球的体积应不小于__0.6__m^3。

7.（2023·广安中考）定义一种新运算：对于两个非零实数 a，b，$a※b=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$。若 $2※(-2)=1$，则 $(-3)※3$ 的值是__$-\frac{2}{3}$__。

8.（2023·眉山中考）关于 x 的方程 $\frac{x+m}{x-2}-3=\frac{x-1}{2-x}$ 的解为非负数，则 m 的取值范围是__$m\geqslant-5$ 且 $m\neq-3$__。

9.（2023·滨州中考）要修一个圆形喷水池，在池中心竖直安装一根水管，在水管的顶端安装一个喷水头，使喷出的抛物线形水柱在与池中心的水平距离为 1 m 处达到最高，高度为 3 m，水柱落地处离池中心 3 m，水管高度应为__2.25 m__。

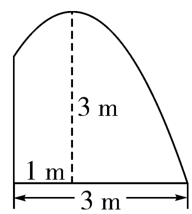


图 3-4-6

第四部分

中考模拟试题

中考模拟试题

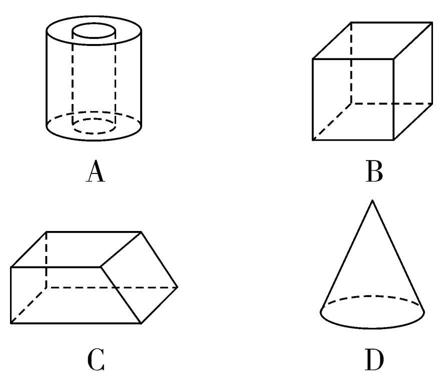
（满分：120 分）

一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，计 24 分。每小题只有一个选项是符合题意的）

1. 计算：$-3-2=$ （ D ）

A. -1 B. 1 C. 5 D. -5

2. 下列几何体中，左视图与主视图不同的是 （ C ）



3. 如图 4-1-1，$AB /\!/ CD$，$AF \perp BC$，垂足为 F，点 E 在 BC 上，且 $CD=CE$，$\angle D=76°$，则 $\angle A$ 的度数为 （ B ）

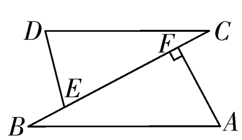


图 4-1-1

A. 28° B. 62°

C. 76° D. 104°

4. 下列计算正确的是 （ D ）

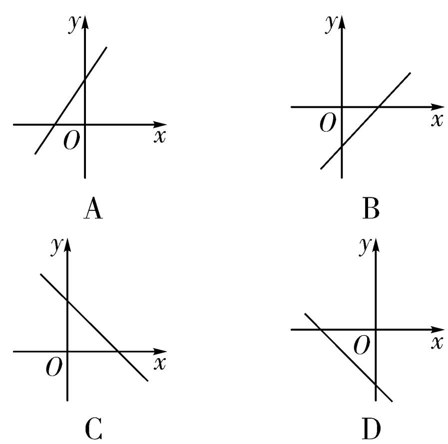
A. $a^6 \div a^3 = a^2 (a \neq 0)$

B. $(-2y^3)^4 = -16y^{12}$

C. $3a^2 + a = 4a^3$

D. $2a^3 \cdot 8a = 16a^4$

5. 已知正比例函数 $y=-kx(k \neq 0)$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，则一次函数 $y=kx-k$ 的图像大致是 （ B ）



6. 如图 4-1-2，点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点，M 是 CD 边的中点。若 $AB=8$，$OB=5$，则线段 OM 的长为 （ D ）

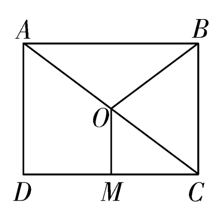


图 4-1-2

A. 8 B. 6

C. 4 D. 3

7. 如图 4-1-3，点 A,B,C,D 在 $\odot O$ 上，$AC\perp BC$，$AC=4$，$\angle ADC=30°$，则 BC 的长为 （ A ）

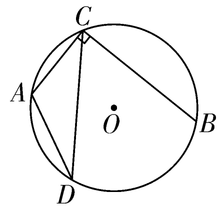


图 4-1-3

A. $4\sqrt{3}$　　B. 8　　C. $4\sqrt{2}$　　D. 4

8. 下表列出的是一个二次函数的自变量 x 与 y 的几组对应值。下列选项正确的是 （ D ）

x	…	-3	-1	0	1	…
y	…	-4	2	2	0	…

A. 这个函数图像的开口向上

B. 这个函数的最大值是 2

C. 当 $x>-1$ 时，y 随 x 的增大而增大

D. 以该函数图像与两坐标轴的交点为顶点的三角形的面积是 3

二、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，计 15 分）

9. 如图 4-1-4，已知 A,B,C 是数轴上的三个点，且 C 在 B 的左侧。点 A,B 表示的数分别是 1，3。若 $BC=2AB$，则点 C 表示的数是 $\underline{\;-1\;}$。

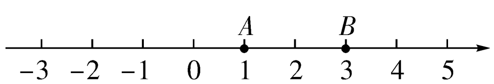


图 4-1-4

10. 边心距为 $2\sqrt{3}$ 的正六边形的面积为 $\underline{\;24\sqrt{3}\;}$。

11. 如图 4-1-5，四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC,BD 交于点 O，$AC=8$，$BD=6$，$DH\perp AB$，垂足为点 H，且 DH 与 AC 交于点 G，则 $\cos\angle DGO$ 的值为 $\underline{\;\frac{3}{5}\;}$。

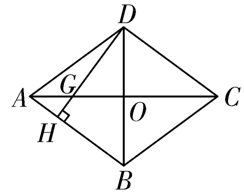


图 4-1-5

12. 如图 4-1-6，点 B 是反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ $(x>0)$ 的图像上任意一点，$AB\parallel x$ 轴并交反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(x<0)$ 的图像于点 A，以 AB 为边作平行四边形 $BCDA$，其中 C,D 在 x 轴上，已知平行四边形 $ABCD$ 的面积为 5，则 k 的值为 $\underline{\;-3\;}$。

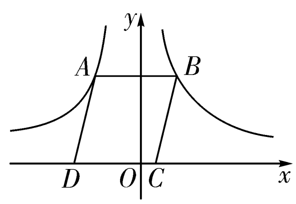


图 4-1-6

13. 如图 4-1-7，$\angle MON=90°$，矩形 $ABCD$ 的顶点 A,B 分别在边 OM,ON 上，当点 B 在边 ON 上运动时，点 A 随之在 OM 上运动，矩形 $ABCD$ 的形状保持不变，其中 $AB=8$，$BC=3$，在运动过程中，点 D 到点 O 的最大距离是 $\underline{\;9\;}$。

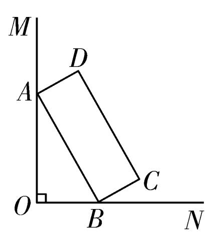


图 4-1-7

三、解答题(共 13 小题,计 81 分。解答应写出过程)

14. (5 分) 解不等式组:$\begin{cases}x-2(x-1)\leqslant -1,\\ \dfrac{1+x}{3}>x-3。\end{cases}$

解:$\begin{cases}x-2(x-1)\leqslant -1,①\\ \dfrac{1+x}{3}>x-3,②\end{cases}$

解不等式①,得 $x\geqslant 3$,

解不等式②,得 $x<5$,

∴ 原不等式组的解集为 $3\leqslant x<5$。

15. (5 分) 计算:$-2\times\sqrt[3]{-27}-|1-\sqrt{3}|-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$。

解:原式 $=-2\times(-3)-\sqrt{3}+1-4=3-\sqrt{3}$。

16. (5 分) 化简:$\dfrac{m+1}{m^2-9}\div\left(\dfrac{4}{m-3}+1\right)$。

解:$\dfrac{m+1}{m^2-9}\div\left(\dfrac{4}{m-3}+1\right)$

$=\dfrac{m+1}{(m+3)(m-3)}\div\left(\dfrac{4}{m-3}+\dfrac{m-3}{m-3}\right)$

$=\dfrac{m+1}{(m+3)(m-3)}\div\dfrac{m+1}{m-3}$

$=\dfrac{m+1}{(m+3)(m-3)}\times\dfrac{m-3}{m+1}$

$=\dfrac{1}{m+3}$。

17. (5 分) 如图 4-1-8,已知 $\triangle ABC$,$AB<AC$,$\angle C=45°$。请用尺规作图法,在 AC 边上求作一点 P,使点 P 到 BC 的距离等于 $\dfrac{1}{2}BC$。(保留作图痕迹,不写作法)

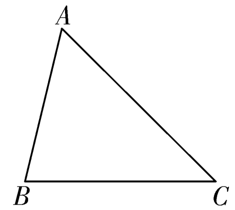
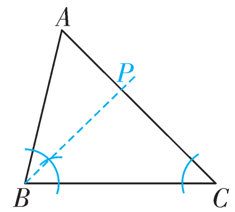


图 4-1-8

解:如图,点 P 即为所求。



18. (5 分)如图 4-1-9,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,点 E 在 AC 的延长线上,$ED\perp AB$,垂足为点 D。若 $AB=AE$,求证:$CE=DB$。

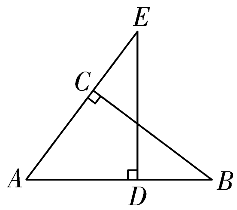


图 4-1-9

证明:$\because ED\perp AB$,$\angle ACB=90°$,

$\therefore \angle ACB=\angle ADE=90°$,$\angle A=\angle A$,$AB=AE$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle AED$(AAS),

$\therefore AC=AD$。

$\because AB=AE$,

$\therefore CE=BD$。

19. (5 分)为传承中华民族优秀传统文化,提高学生文化素养,某学校举办“经典诵读”比赛,比赛题目分为“诗词之风”“散文之韵”“小说之趣”“戏剧之雅”四组(依次记为 A,B,C,D)。小颖和莉莉两名同学参加比赛,其中一名同学从四组题目中随机抽取一组,然后放回,另一名同学再随机抽取一组。

(1)小颖抽到 B 组题目的概率是 $\underline{\frac{1}{4}}$;

(2)请用列表法或画树状图的方法,求小颖和莉莉两名同学抽到相同题目的概率。

解:(2)根据题意列表如下:

莉莉 / 小颖	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD

由上表可知,共有 16 种等可能结果,其中小颖和莉莉两名同学抽到相同题目的结果数有 4 种,分别是 AA,BB,CC,DD,

$\therefore P$(小颖和莉莉两名同学抽到相同题目)$=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$。

20. (5 分)某市为更有效地利用水资源,制定了居民用水收费标准:每户居民每月用水量如果不超过 12 m^3,按每立方米 3.5 元收费;如果超过 12 m^3,超过部分按每立方米 4.6元收费。若某户居民 8 月份共支付水费 78.8 元,求该户居民 8 月份的用水量。

解:$\because 12\times3.5=42$(元),

又$\because 42<78.8$,

$\therefore$ 该户居民用水量超过 12 m^3。

设该户居民 8 月份用水量为 x m^3,由题意可得 $12\times3.5+(x-12)\times4.6=78.8$,

解得 $x=20$。

答:该户居民 8 月份用水量为 20 m^3。

21. (6 分)如图 4-1-10,操场上的旗杆 AB 直立于地面。在阳光明媚的一天,某一时刻,它的影子恰好落在水平地面 AC 和操场看台斜坡 CD 上,科技小组的同学经过测量得知,地面上的影子 $AC=5.7$ m,看台斜坡上的影子 $CD=9$ m,看台与地面的夹角 $\angle DCE=45°$,并测得同一时刻高度为 20 cm 的标杆在阳光下的影长是 30 cm,请你根据测量的数据计算旗杆 AB 的高度。(参考数据:$\sin 45°=\cos 45°\approx0.7$)

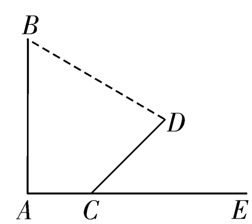
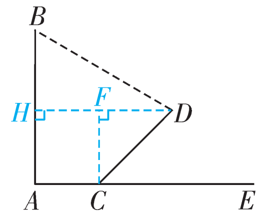


图 4-1-10

解：过 D 作 $DH\perp AB$，垂足为 H，过 C 作 $CF\perp DH$，垂足为 F，如图。



由题意可知，四边形 $ACFH$ 为矩形，$AC=FH=5.7$，$AH=CF$。

$\because \angle DCE=45°$，

$\therefore \angle DCF=45°$。

$\because CF\perp DH$，$CD=9$，

$\therefore CF=DF=CD\cdot \sin 45°\approx 6.3$。

$\because$ 同一时刻 20 cm 的标杆在阳光下的影长是 30 cm，

根据同时同地物高和影长成正比得 $\frac{BH}{DH}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{BH}{5.7+6.3}=\frac{2}{3}$，

解得 $BH=8$。

$\because AH=CF=6.3$，

$\therefore AB=AH+BH=6.3+8=14.3(\text{m})$。

答：旗杆 AB 的高度为 14.3 m。

22. (7 分) 已知汽车燃油箱中剩余的油量 y（单位：L）与汽车行驶里程数 x（单位：km）是一次函数关系。王老师从某汽车租赁公司租了一辆小汽车，拟去距离出发地 600 km的目的地旅游（出发之前，王老师往该汽车燃油箱内注满了油），该汽车行驶了 200 km之后，油箱中的剩余油量为 40 L；又行驶了 100 km，油箱中的剩余油量为 30 L。

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式；

(2) 当汽车燃油箱中的剩余油量为 8 L 的时候，汽车仪表盘上的燃油指示灯就会亮起来。在燃油指示灯亮起来之前，王老师驾驶该车能否抵达目的地？请通过计算说明。

解：(1) 设 y 关于 x 的函数关系式为 $y=kx+b\ (k\neq 0)$，

由题意，得 $\begin{cases}40=200k+b,\\30=300k+b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{10},\\b=60,\end{cases}$

$\therefore y$ 关于 x 的函数关系式为 $y=-\frac{1}{10}x+60$。

(2) 当 $y=8$ 时，$8=-\frac{1}{10}x+60$，

解得 $x=520$。

$\because 520<600$，

$\therefore$ 在燃油指示灯亮起来之前，王老师驾驶该车不能抵达目的地。

23. (7 分) 为迎接今年的世界读书日，某学校开展了“不负春光，书香陪伴”阅读活动，同时为了解学生课外阅读情况，随机调查了该校部分学生一周的课外阅读时间，将调查结果绘制成了尚不完整的统计图表。

学生课外阅读时间统计表

组别	阅读时间 x/h	频数
A	$2\leq x<4$	3
B	$4\leq x<6$	m
C	$6\leq x<8$	30
D	$8\leq x<10$	12
E	$10\leq x<12$	3

学生课外阅读时间扇形统计图

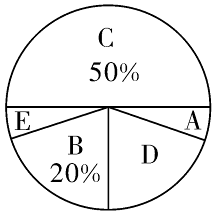


图 4-1-11

请你根据以上信息回答下列问题：

(1)填空：$m=$ __12__，扇形统计图中 D 组所对应的圆心角的度数是__72__°，所调查学生一周的课外阅读时间的中位数落在__C__组；

(2)求所调查学生一周的课外阅读时间的平均数；(每组数据的平均数用组中值代表，例如：A 组 $2\leqslant x<4$ 的平均数是 3)

(3)若该校共有 1 200 名学生，请你估计一周的课外阅读时间不少于 8 h 的学生人数。

解：(1)$\because 30\div50\%=60$(名)，

$\therefore m=60-(3+30+12+3)=12$。

D 组所对应的圆心角的度数为$\frac{12}{60}\times360°=72°$。

$\because$ 中位数为所有阅读时间排序后的第 30，31 位的平均数，

$\therefore$ 所调查学生一周的课外阅读时间的中位数落在 C 组。

故答案为 12；72；C。

(2) $\bar{x}=\frac{1}{60}\times(3\times3+5\times12+7\times30+9\times12+11\times3)=7$，

$\therefore$ 所调查学生一周的课外阅读时间的平均数为 7 h。

(3) $1\ 200\times\frac{12+3}{60}=300$(名)。

$\therefore$ 估计一周的课外阅读时间不少于 8 h 的学生有 300 名。

24. (8 分)如图 4-1-12，AB 为 $\odot O$ 的直径，C 为 $\odot O$ 上一点，过 C 作 $\odot O$ 的切线与 AB 延长线交于点 D，连接 AC，OC，BC。

(1)求证：$\angle ACO=\angle DCB$；

(2)若 $AB=2\sqrt{5}$，$AC=2BC$，求 BD 的长。

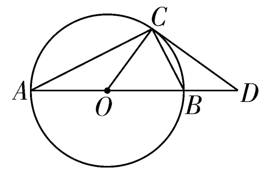


图 4-1-12

(1)证明：$\because$ CD 为 $\odot O$ 的切线，OC 为 $\odot O$ 的半径，

$\therefore OC\perp CD$，即 $\angle OCB+\angle DCB=90°$。

又 $\because$ AB 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle OCB+\angle ACO=90°$，

$\therefore \angle ACO=\angle DCB$。

(2)解：$\because OC=OA$，

$\therefore \angle ACO=\angle CAD$。

又 $\because \angle ACO=\angle DCB$，

$\therefore \angle DCB=\angle DAC$，$\angle D=\angle D$，

$\therefore \triangle DBC\backsim\triangle DCA$。

又 $\because AC=2BC$，

$\therefore \frac{CD}{AD}=\frac{BD}{CD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$。

设 $BD=x$，则 $CD=2x$，

$\because CD^2=BD\cdot AD$，

$\therefore (2x)^2=x(x+2\sqrt{5})$，

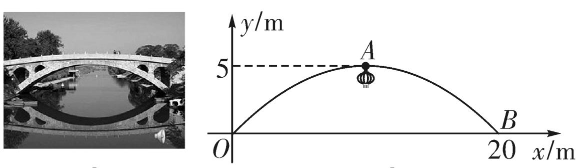
解得 $x_1=0$(舍去)，$x_2=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore BD$ 的长为$\frac{2\sqrt{5}}{3}$。

25. (8 分) 图 4-1-13①是一座拱桥，图 4-1-13②是以左侧桥墩与水面接触点为原点建立的平面直角坐标系下其抛物线形拱桥的示意图，经测量水面宽度 $OB=20$ m，拱顶 A 到水面的距离为 5 m。

(1) 求这条抛物线的函数表达式；

(2) 为迎接国庆节，管理部门在桥下水平方向每隔 2 m 对称的悬挂了 9 个长为 50 cm的灯笼，中间的灯笼正好悬挂在 A 处，为了安全，要求灯笼的最低处到水面的距离不得少于 1 m。根据气象部门预报，国庆节期间将会有一定量的降雨，桥下水面会上升 25 cm，请通过计算说明，现在的悬挂方式是否安全。



① ②

图 4-1-13

解：(1) 由题意可知抛物线顶点的坐标为 (10, 5)，设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-10)^2+5$，

将 (0, 0) 代入，得 $100a+5=0$，解得 $a=-0.05$，

$\therefore y=-0.05(x-10)^2+5=-0.05x^2+x$，

故抛物线的函数表达式为 $y=-0.05x^2+x$。

(2) $\because$ 中间的灯笼正好挂在点 A 处，

$\therefore$ 最左边靠近点 O 的灯笼离点 A 的水平距离为 $4\times2=8$ m，

$\therefore$ 最左边靠近点 O 的灯笼悬挂位置的横坐标为 2，

将 $x=2$ 代入 $y=-0.05x^2+x$，解得 $y=1.8$，即最左边靠近点 O 的灯笼悬挂位置距离水面 1.8 m。

$\because$ 灯笼的长为 0.5 m，

$\therefore$ 当水面上升 0.25 m 时，最左边靠近点 O 的灯笼最低点离水面的距离是 1.05 m。

$\because 1.05$ m >1 m，

$\therefore$ 现在的悬挂方式是安全的。

26. (10 分) (1) 如图 4-1-14，半圆 O 的直径 $AB=8$，P 是半圆 O 上的一个动点，则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是__16__。

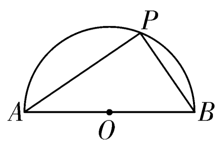


图 4-1-14

(2) 图 4-1-15 是某街心公园的一角。在扇形 OAB 中，$\angle AOB=90°$，$OA=12$ m，在围墙 OA 和 OB 上分别有两个入口 C 和 D，$AC=4$ m，D 是 OB 的中点，出口 E 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上。现准备沿 CE，DE 从入口到出口铺设两条景观小路，在四边形 $CODE$ 内种花，在剩余区域种草。

①出口 E 设在距直线 OB 多远处可以使四边形 $CODE$ 的面积最大？最大面积是多少？（小路宽度忽略不计）

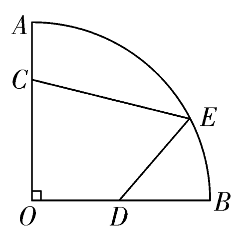


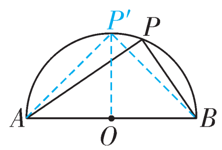
图 4-1-15

②已知铺设小路 CE 所用的普通石材每米的造价是 200 元，铺设小路 DE 所用的景

观石材每米的造价是 400 元。问：在$\overset{\frown}{AB}$上是否存在点 E，使铺设小路 CE 和 DE 的总造价最低？若存在，请求出最低总造价和出口 E 距直线 OB 的距离；若不存在，请说明理由。

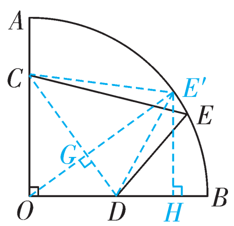
解：(1)16

解析：如图，点 P 运动至$\overset{\frown}{AB}$的中点 P'时，底边 AB 上的高最大，即 $P'O=r=4$，此时 $\triangle PAB$ 的面积最大，



$\therefore S_{\triangle P'AB}=\frac{1}{2}\times8\times4=16$。

(2)①如图，连接 CD，作 $OG\perp CD$，垂足为 G，延长 OG 交$\overset{\frown}{AB}$于点 E'，则此时 $\triangle CDE'$ 的面积最大。



$\because OA=OB=12$，$AC=4$，点 D 为 OB 的中点，

$\therefore OC=8$，$OD=6$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle COD$ 中，$CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=10$，

$\therefore OG=\frac{OC\cdot OD}{CD}=4.8$，

$\therefore GE'=12-4.8=7.2$，

$\therefore$ 四边形 $CODE$ 面积的最大值为 $S_{\triangle CDO}+S_{\triangle CDE'}=\frac{1}{2}\times6\times8+\frac{1}{2}\times10\times7.2=60(\mathrm{m}^2)$。

如图，作 $E'H\perp OB$，垂足为 H，

$\because \angle E'OH+\angle OE'H=90°$，$\angle E'OH+\angle ODC=90°$，

$\therefore \angle OE'H=\angle ODC$。

又$\because \angle COD=\angle E'HO=90°$，

$\therefore \triangle COD\backsim\triangle OHE'$，

$\therefore \frac{OD}{E'H}=\frac{CD}{OE'}$，

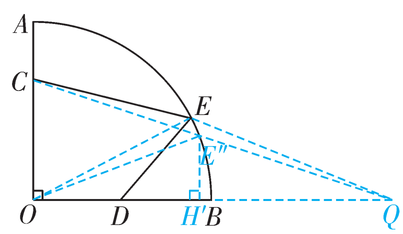
$\therefore \frac{6}{E'H}=\frac{10}{12}$，

$\therefore E'H=7.2$，

$\therefore$ 出口 E 设在距直线 OB 的 7.2 m 处可以使四边形 $CODE$ 的面积最大，面积最大为 60 m^2。

②在$\overset{\frown}{AB}$上存在点 E，使铺设小路 CE 和 DE 的总造价最低。

理由如下：由题意可知，铺设小路 CE 和 DE 的总造价为 $200CE+400DE=200(CE+2DE)$，如图，连接 OE，延长 OB 至点 Q，使 $BQ=OB=12$，连接 EQ。



在 $\triangle EOD$ 与 $\triangle QOE$ 中，$\angle EOD=\angle QOE$，

又$\frac{OD}{OE}=\frac{OE}{OQ}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \triangle EOD\backsim\triangle QOE$，

$\therefore QE=2DE$，

$\therefore CE+2DE=CE+QE$，即求 $CE+2DE$ 的最小值，就是求 $CE+QE$ 的最小值，

连接 CQ，交$\overset{\frown}{AB}$于点 E''，此时 $CE+QE$ 最小，最小值为 CQ 的长度。

在 $\mathrm{Rt}\triangle COQ$ 中，$CO=8$，$OQ=24$，

$\therefore CQ=8\sqrt{10}$，故总造价的最小值为

$1\ 600\sqrt{10}$元。

作 $E''H' \perp OB$，垂足为 H'，连接 OE''，

$\because \angle E''H'O=90°$，$\angle AOQ=90°$，

$\therefore E''H' /\!/ AO$，

$\therefore \triangle QE''H' \backsim \triangle QCO$，

$\therefore \dfrac{E''H'}{QH'}=\dfrac{CO}{OQ}=\dfrac{1}{3}$，

设 $E''H'=x$，则 $QH'=3x$，

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle E''OH'$ 中，$OH'^2+H'E''^2=OE''^2$，

$\therefore (24-3x)^2+x^2=12^2$，

解得 $x_1=\dfrac{36-6\sqrt{6}}{5}$，$x_2=\dfrac{36+6\sqrt{6}}{5}$（舍去），

$\therefore$ 总造价的最小值为 $1\ 600\sqrt{10}$元，出口 E 距直线 OB 的距离为$\dfrac{36-6\sqrt{6}}{5}$ m。